



Quelques problèmes fortement non-linéaires de surface libre et leur résolution numérique

Laurent Duchemin

► To cite this version:

Laurent Duchemin. Quelques problèmes fortement non-linéaires de surface libre et leur résolution numérique. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001. Français. NNT: . tel-00084132

HAL Id: tel-00084132

<https://theses.hal.science/tel-00084132>

Submitted on 5 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Aix-Marseille II

**Quelques problèmes fortement non-linéaires
de surface libre et leur résolution
numérique**

présentée par

Laurent Duchemin

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Aix-Marseille II
Spécialité : Mécanique des fluides

Soutenue le 20 décembre 2001
devant le jury composé de :

Roland Borghi	Président
Jean Sylvestre Darrozes	Examineur
Frédéric Dias	Rapporteur
Jean-Pierre Franc	Rapporteur
Christophe Josserand	Examineur
Christian Kharif	Directeur de thèse
David Quéré	Examineur
Stéphane Zaleski	Directeur de thèse

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques problèmes d'interfaces entre fluides non miscibles. La première partie consiste en la description du phénomène d'éclatement d'une bulle à la surface d'un liquide. Un programme de résolution des équations de Navier Stokes en présence d'une surface libre est utilisé. Il décrit la surface grâce à une chaîne de marqueurs. Cette approche permet de prendre en compte de manière très précise l'effet de la tension superficielle. Une étude paramétrique est conduite qui met en évidence un régime pour lequel on observe une singularité de courbure en temps fini. L'existence de cette singularité est vérifiée à l'aide d'une théorie auto-similaire, fondée sur l'hypothèse d'un écoulement potentiel.

Le seconde partie traite de la résolution d'écoulements potentiels en géométrie axisymétrique. A ces fins, une méthode d'intégrales de frontières est développée. Elle est d'abord validée à l'aide de la connaissance théorique des modes d'oscillations d'une goutte en apesanteur. Elle est ensuite appliquée à deux problèmes distincts : l'impact d'une goutte sur une surface hydrophobe et la coalescence de deux gouttes en apesanteur. Ce dernier problème présentant deux échelles spatiales très différentes, un raffinement inhomogène du maillage de la surface est opéré. En outre, une comparaison entre les simulations et certains résultats expérimentaux est effectuée.

Abstract

This dissertation deals with some highly non linear free surface flow problems. The first part is dedicated to the study of the bursting of a bubble at the free surface of a liquid. To this end, a numerical method is used which solves the Navier Stokes equations, in the presence of a free surface. This free surface is described using a markers chain. The surface tension terms are then treated with high precision. A parametric study on the bubble radius is undertaken and a range of parameter region is found to correspond to a curvature singularity in finite time. The existence of this singularity is confirmed by a self-similar theory, based on an invicid formulation.

The second part presents the resolution of potential axisymmetric flows in the presence of a free surface. The theory and developpment of a boundary integral method is described in details. Firstly, the method is validated using the theoretical knowledge of the spherical harmonics of an oscillating liquid drop. Then it is applied to two distinct problems : the impact of a drop on a super hydrophobic surface and the coalescence of two spherical drops. This second case presents a singularity in finite time because it involves a high curvature region at the time of contact. The scaling laws describing this singularity are then discussed and a comparison between experiments and numerical results is presented.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Stéphane Zaleski, Christian Kharif et Christophe Josserand qui ont encadré cette thèse – de manière officielle ou officieuse – avec patience, face à mon comportement quelque peu "diffusif" en matière de travail. Ils ont chacun eu un rôle différent, mais essentiel dans le déroulement de ces trois années de doctorat.

J'ai eu la chance de rencontrer beaucoup de personnes, étudiants, chercheurs, qui ont enrichi mon quotidien, m'ont soutenu dans la tourmente de mes interrogations. La liste est trop longue et j'ai confiance : je sais qu'ils se reconnaîtront.

Je dédie cette thèse à mes parents, frère et soeurs qui savent désormais que l'on peut réfléchir pendant plusieurs années à l'éclatement de petites bulles.

"C'est ici un livre de bonne foi, lecteur. Il t'avertit dès l'entrée, que je ne m'y suis proposé aucune fin que domestique et privée. Je n'y ai eu nulle considération de ton service, ni de ma gloire. Mes forces ne sont pas capables d'un tel dessein."

Michel de Montaigne, *Au lecteur, Les Essais*, 1580

Table des matières

Introduction	1
 I. Interactions d'une bulle avec une surface libre	 13
Introduction	15
1. Configuration statique d'une bulle accrochée à la surface libre	17
1.1. Théorie	17
1.2. Résultats	20
1.3. Conclusions	23
2. Méthode des marqueurs avec surface libre	25
2.1. Maillage et discrétisation des équations	25
2.2. Méthode de projection	29
2.3. Tests de validation	31
2.4. Conclusion	32
3. Eclatement d'une bulle à la surface d'un liquide	35
3.1. Lois d'échelles en théorie potentielle	35
3.2. Comparaison avec l'expérience	36
3.3. Etude paramétrique	40
3.4. Théorie auto-similaire	48
3.5. Retour sur l'étude paramétrique	53
3.6. Emprisonnement d'une bulle	55
3.7. Etude avec des formes de bulles réalistes en présence de gravité .	58
Conclusions	63
 II. Ecoulements potentiels	 65
Introduction	67

4. Etude du déferlement plongeant	69
4.1. Méthode intégrale pour les écoulements plans périodiques	69
4.2. Discrétisation des équations	72
4.3. Vagues déferlantes	74
4.4. Correction pour les fluides faiblement visqueux	76
4.4.1. Bilan des contraintes à l'interface	78
4.4.2. Ordres de grandeur	78
4.4.3. Equation de transport de A_z	79
4.4.4. Equation de transport de U_n	80
4.4.5. Détermination de la surpression dans la couche limite . .	81
4.4.6. Condition dynamique	82
4.4.7. Récapitulatif	83
4.5. Conclusions	83
5. Méthode intégrale en trois dimensions	85
5.1. Equations gouvernant l'écoulement	85
5.2. Cas particulier d'un écoulement à symétrie axiale	89
5.3. Méthode numérique	90
5.3.1. Pas de temps adaptatif	93
5.3.2. Lissage de la surface, du potentiel et de la densité de dipôles	93
5.4. Tests de convergence de la méthode	94
5.5. Impact d'une goutte sur une surface hydrophobe	99
5.6. Conclusions	105
6. Coalescence de deux gouttes en apesanteur	109
6.1. Comparaison avec l'expérience	109
6.2. Etude aux instants courts	112
6.2.1. Résultats numériques pour $r_p = 0.1R$	113
6.2.2. Simulations pour $r_p = 0.01R$	114
Conclusion	119
7. Conclusions et perspectives	121
A. Calcul de la courbure locale d'une surface de révolution	123
B. Résidu complexe	127
C. Résidu du calcul de φ sur la surface	129
D. Calcul des noyaux des intégrales de Fredholm et du vecteur potentiel	131
D.1. Equation intégrale de Fredholm	131
D.2. Vecteur potentiel	133

Des océans aux bulles de champagne

Les océans recouvrent soixante-dix pour cent de la surface de notre planète. Nous n'avons pas toujours conscience de l'influence qu'ils exercent sur notre vie quotidienne. On devine, en regardant les prévisions météorologiques, qu'ils participent aux évolutions du climat, même continental. De même que les forêts résorbent le dioxyde de carbone contenu dans l'atmosphère, à la surface des océans s'opèrent des échanges qui conditionnent l'équilibre climatique global de la terre. Le premier transfert qui vient à l'esprit est celui de la vapeur d'eau : l'eau contenue dans l'atmosphère provient des océans. D'autres échanges, également très importants s'opèrent à l'interface océan-atmosphère. Certaines molécules de gaz comme le dioxyde de carbone, certaines bactéries ou encore des particules solides sont, soit rejetées des océans, soit au contraire absorbées. L'air de l'atmosphère est aussi dissout dans l'eau, via des processus complexes à l'interface.



FIG. 0.1.: *Déferlement d'une vague en eau profonde.*

Parmi les facteurs responsables de ces échanges, le déferlement des vagues occupe une place importante. En effet, le déferlement est une source de turbulence dans l'air et dans l'eau, il génère des courants, emprisonne des poches d'air sous la surface, éjecte des embruns ; autant de phénomènes qui participent aux

échanges gazeux et particulaires. Des modèles physiques existent qui prennent en compte de manière globale ces différentes contributions aux transferts [9], ainsi que les phénomènes thermodynamiques.

Le déferlement est un sujet d'étude classique, d'une grande richesse théorique. On trouve, dans la littérature, de nombreux articles [31] traitant des causes et des conséquences du déferlement plongeant, par exemple, bien connu des surfeurs.

La compréhension de tels écoulements – d'une échelle proche du mètre – ne suffit pas à rendre compte des échanges de masse qui s'opèrent à des échelles beaucoup plus petites. Par exemple, de très petites bulles peuvent être emprisonnées par des ondes capillaires à la surface, et se dissoudre dans l'eau [49]. Ces bulles résultent notamment de l'impact de gouttes sur la surface [27] (Cf. Fig. 0.2).

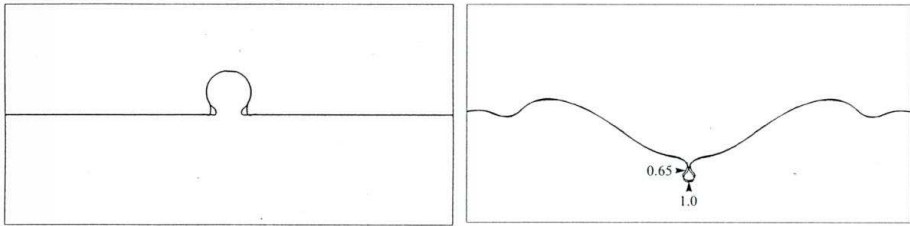


FIG. 0.2.: *Simulation numérique de l'impact d'une goutte sur une surface liquide, d'après Oguz et Prosperetti [33]. L'impact peut provoquer l'emprisonnement d'une bulle. Cette figure montre que pour une vitesse et une taille de goutte données, la condition initiale adoptée pour le calcul influence peu la taille de la bulle.*

Le déferlement et les mouvements de la surface à notre échelle induisent d'autres mécanismes qui participent aux transferts. Deux exemples de ces mécanismes nous sont très familiers.

Dynamique des bulles : rupture en surface

Lorsqu'une vague déferlante entraîne une poche d'air sous la surface, celle-ci se fragmente en un grand nombre de petites bulles. Ces bulles sont transportées par le courant et remontent sous l'effet bien connu de la poussée d'Archimède. Pendant leur remontée, les molécules hydrophobes contenues dans l'eau trouvent refuge sur leur surface. Ce sont ces molécules, de gaz, principalement, qui vont être ensuite éjectées dans l'atmosphère. Une fois à la surface, ces bulles restent dans une position d'équilibre, tant que le film qui les sépare de l'atmosphère n'est pas rompu. Puis, on peut observer deux phénomènes successifs :

- La rupture du film. C'est un phénomène rapide qui libère un très grand nombre de gouttes ¹.

¹parfois plusieurs milliers de gouttes d'un diamètre de l'ordre du micron

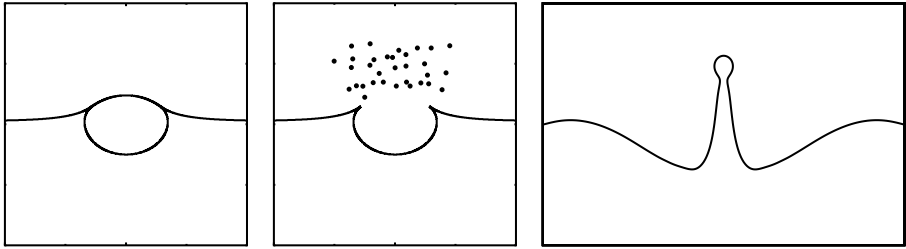


FIG. 0.3.: Les trois phases de l'éclatement d'une bulle à la surface libre : le film surmontant la cavité se draine progressivement. De nombreuses gouttes sont alors éjectées dans l'atmosphère. Finalement, la cavité s'effondre en donnant naissance à un jet vertical duquel se détachent une ou plusieurs gouttes.

- L'effondrement de la cavité et la naissance d'un jet vertical mince duquel se détachent une ou plusieurs gouttes. C'est exactement ce que l'on peut voir à la surface d'un verre de champagne.

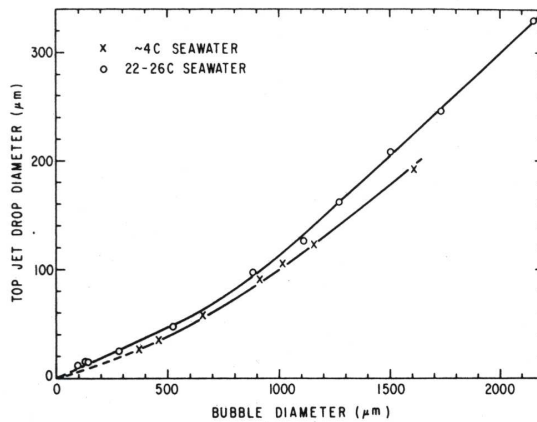


FIG. 0.4.: Diamètre de la première goutte de jet émise lors de l'éclatement d'une bulle à la surface. Résultats expérimentaux extraits de l'article de Duncan C. Blanchard [5].

Compte tenu de l'intérêt que ces deux phénomènes présentent vis-à-vis des échanges entre les océans et l'atmosphère, ils ont chacun fait l'objet de nombreuses études. La rupture du film a été observée expérimentalement [41], grâce à des caméras rapides, mais peu de conclusions théoriques ont pu en être tirées. Quant aux simulations numériques, elle sont difficiles à mener étant données les échelles spatiale et temporelle de la rupture du film (pour une bulle d'un milli-

mètre de diamètre, les gouttes émises ont un diamètre d'environ $1\ \mu\text{m}$ et le temps caractéristique de la rupture est de $100\ \mu\text{s}$). En revanche, l'effondrement ultérieur de la cavité et la formation du jet vertical sont des phénomènes plus lents. De nombreuses études, autant expérimentales [46, 47, 48] que numériques [8, 7], ont donc été menées sur le sujet. L'objectif de telles études est d'accéder à des grandeurs comme le nombre de gouttes émises par le jet, leur vitesse, leur volume, ou encore l'influence de pellicules adsorbées sur la surface. La figure 0.4, présente les résultats d'une étude expérimentale de la masse de la première goutte émise [5]. Ce type de données permet, connaissant la distribution de tailles de bulles, de savoir quelle quantité de gouttes émises dans l'atmosphère pourront par la suite s'évaporer. La plupart des études numériques effectuées sur le sujet sont basées sur l'approximation de fluide non visqueux ou faiblement visqueux. Néanmoins, on ne peut pas faire cette approximation pour les plus petites échelles.

La formation et la rupture du jet vertical sont des phénomènes communs que l'on peut observer dans d'autres contextes. Par exemple, lorsqu'une goutte tombe sur la surface d'un liquide, une cavité est formée pendant un court instant, puis on assiste à l'émergence d'un jet vertical.



FIG. 0.5.: *Résultat de l'impact d'une goutte sur la surface d'un liquide.*

La photographie 0.5 représente ce type de jet. On constate qu'une goutte vient de se détacher. La fragmentation d'un jet en gouttes ou la coalescence de gouttes sont omniprésents dans notre vie quotidienne. C'est un des autres phénomènes observables aux petites échelles du déferlement.

Formation de gouttes, rupture de jets

Bien souvent, le déferlement est accompagné de vents plus ou moins violents qui arrachent des aérosols à la crête des vagues. De même que les gouttes produites par l'éclatement des bulles à la surface, ces embruns peuvent ensuite s'évaporer et laisser dans l'atmosphère les molécules (de sel, par exemple) dont ils sont chargés. Le mécanisme de rupture des jets a suscité de nombreuses recherches, tant ses applications sont nombreuses. D'un point de vue industriel, les moteurs actuels utilisent des injecteurs qui pulvérisent l'essence dans la chambre de combustion, ou en amont. La qualité de cette atomisation conditionne l'efficacité du moteur. Plus les gouttes formées sont petites, meilleure sera la combustion. Il est donc capital d'identifier les mécanismes qui provoquent cette atomisation : est-ce la turbulence dans le liquide, la turbulence dans le gaz ou l'importante différence de vitesse des deux milieux ? Ces questions restent ouvertes. Des études, cette fois-ci théoriques [12, 13], expérimentales [14, 40], numériques [16], ont été menées depuis le *XIX^{ème}* siècle pour tenter de comprendre la rupture des jets. Si l'on simplifie à l'extrême l'écoulement, on obtient des gouttes comme représentées sur la photographie 0.6, parfaitement symétriques par rapport à un axe (vertical, dans le cas présent). Une goutte se détachant d'un robinet donne naissance à plusieurs petites gouttes de diamètres différents.



FIG. 0.6.: *Formation de gouttes lors de la rupture d'un jet. Image extraite d'un article de Shi, Brenner et Nagel [43]. On remarque l'apparition d'ondes capillaires instables le long du jet.*

Cette rupture est principalement due à une autre caractéristique des interfaces entre liquides et gaz.

La tension superficielle

Le matin, la rosée se dépose sur les toiles d'araignées sous forme de perles liquides de petite taille, et non pas sous forme d'un film liquide uniforme. Lorsque l'on touche l'une de ces gouttes, elle oscille puis retrouve sa forme d'équilibre très proche de la sphère. Cette élasticité s'appelle la tension de surface. Cette force qu'exerce la surface sur le liquide peut être associée à une énergie superficielle, proportionnelle à la surface. Comme tout système soumis à plusieurs contraintes, la goutte trouve son état d'équilibre pour le minimum d'énergie totale. Or, pour une petite goutte, la tension superficielle est plus importante que la gravité, c'est donc la surface minimale ² qui correspond au minimum d'énergie, à savoir la sphère.

On peut formaliser cette propriété de manière plus mathématique : il existe une différence de pression entre le liquide et le gaz, égale à la courbure locale de la surface κ multipliée par un coefficient σ , appelé coefficient de tension superficielle, dépendant des deux fluides en présence. La pression la plus forte règne dans le fluide dont la surface est convexe.

$$[p]_s = \sigma \kappa$$

où κ est la courbure moyenne de la surface, c'est-à-dire la somme des deux courbures principales :

$$\kappa = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Cette équation est écrite pour les fluides immobiles ou non visqueux. On peut alors vérifier la remarque précédente : si la pression est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte, le saut de pression est constant sur la surface et, par conséquent, la courbure l'est aussi. De même, à l'endroit où le jet s'amincit, avant la rupture, il existe une différence de pression entre le liquide et le gaz. La force qui en résulte est orientée du gaz vers le liquide. La forme cylindrique n'étant pas un minimum de la surface à volume constant, le rayon du jet décroît inexorablement jusqu'à la rupture, de manière à former des gouttes.

On peut montrer aisément que des contraintes volumiques, comme la force de gravité, ne peuvent provoquer la rupture du jet qu'en un temps infini [14]. En revanche, la tension de surface provoque cette rupture en un temps fini. La courbure au voisinage du point de rupture atteint des valeurs arbitrairement grandes. Une quantité représentative de l'écoulement diverge en un temps fini : c'est ce qu'on appelle une singularité en temps fini.

Singularités en temps fini

Dès lors que l'on tente de modéliser un phénomène physique, on a recours à des équations d'évolution. Ces équations prédisent le comportement de grandeurs représentatives de l'écoulement comme la quantité de mouvement, la masse,

²pour un volume donné

l'énergie interne, etc... Lorsque l'une de ces grandeurs prend des valeurs arbitrairement grandes en un temps fini, on parle de singularité en temps fini. Ces singularités existent en mécanique des solides, par exemple : si l'on fait tourner une pièce sur une surface plane, la vitesse de rotation du point de contact croît avec le temps et son asymptote est verticale à proximité de l'instant où la pièce s'immobilise.

Ces caractéristiques se rencontrent parfois dans les écoulements de fluides. L'exemple le plus simple est celui de la rupture des jets. Comme il a été remarqué, la courbure atteint des valeurs très grandes, par conséquent le saut de pression également. C'est la tension de surface qui pilote la rupture. De même que pour la pièce, il existe une longueur de coupure égale ici à l'échelle à laquelle les contraintes visqueuses sont comparables aux contraintes superficielles. En dessous de cette échelle, la tension de surface ne domine plus et l'écoulement est également déterminé par les contraintes visqueuses :

$$l_{\nu\sigma} = \frac{\rho\nu^2}{\sigma}$$

ρ est la masse volumique du liquide et ν sa viscosité cinématique.

C'est d'ailleurs cette seule longueur qui conditionne le lieu et l'instant de la rupture.

Théories auto-similaires

L'exemple de la rupture d'un jet est le problème le plus commun et le mieux résolu des problèmes de singularités. D'autres écoulements peuvent donner naissance à des singularités. Zeff et *al.* [55] présentent, par l'expérience, un exemple typique de singularité géométrique en temps fini. Un récipient cylindrique est rempli à moitié d'un liquide et soumis à des oscillations verticales. Des ondes de Faraday stationnaires, concentriques, naissent alors à la surface [20]. Pour certaines valeurs de l'amplitude et de la fréquence des oscillations, les auteurs observent l'émergence d'un jet vertical très fin et très rapide au centre du récipient (Cf. Fig. 0.7). La naissance de ce jet est liée à l'existence d'une singularité géométrique. Une analyse de l'équation de conservation de la masse montre que si le rayon r d'un point de la surface, à proximité du centre, évolue comme une puissance α de la distance en temps à la singularité, son ordonnée z doit évoluer selon la même puissance :

$$r \sim (t_0 - t)^\alpha \quad z \sim (t_0 - t)^\alpha$$

où t_0 est l'instant de la singularité.

Dans ce cas, si les équations du mouvement possèdent une solution auto-similaire, le potentiel des vitesses φ doit également se comporter comme $(t_0 - t)^\beta$:

$$\varphi(r, z, t) = (t_0 - t)^\beta f\left(\frac{r}{(t_0 - t)^\alpha}, \frac{z}{(t_0 - t)^\alpha}\right)$$

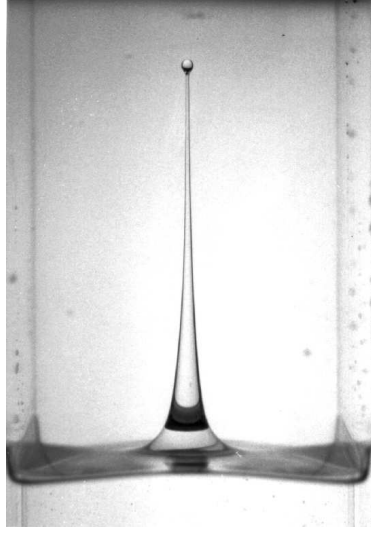


FIG. 0.7.: *Jet vertical fin obtenu par mise en résonance d'ondes de Faraday axi-symétriques [55].*

Si l'on impose aux différents termes de l'équation d'Euler d'évoluer suivant la même puissance, on trouve que α et β doivent nécessairement satisfaire la relation :

$$\beta = 2\alpha - 1$$

Ces exposants décrivent alors une famille de solutions auto-similaires ne prenant en compte ni la gravité, ni la tension de surface. Toutes ces solutions représentent des écoulements coniques loin de la singularité. Si l'on ajoute la tension de surface, l'équilibre des différents termes de l'équation de Bernoulli sur la surface n'est assuré que pour un seul jeu d'exposants : $\alpha = 2/3$ et $\beta = 1/3$ [23, 22]. Le terme générique du développement en série d'une fonction harmonique comme le potentiel des vitesses s'écrit :

$$r^\gamma P_\gamma(\cos \theta)$$

où r est la rayon vecteur en coordonnées sphériques, P_γ la fonction de Legendre d'ordre γ et θ la colatitute. Dans les conditions précédentes, c'est-à-dire en prenant en compte la tension de surface, le terme dominant du potentiel des vitesses s'écrit :

$$\varphi(r, z, t) = (t_0 - t)^{1/3} R^{1/2} P_{1/2}(\cos \Theta)$$

où R et Θ sont ici les coordonnées sphériques dans l'espace des variables auto-similaires. Cette solution correspond à une divergence de la vitesse en $(t_0 - t)^{-1/3}$ pour des valeurs des coordonnées radiales auto-similaire fixées.

Les écoulements coniques ont aussi été présentés comme des cas particuliers d'une famille d'écoulements hyperboliques [26]. Dans cet article, Longuet-Higgins montre que la singularité est décrite par un potentiel de la forme :

$$\varphi(r, z, t) = (t_0 - t)^{1/3} r^2 P_2(\cos \theta)$$

où r et θ sont, cette fois, les coordonnées sphériques dans l'espace physique. La tension de surface est prise en compte sous la forme d'une perturbation de la solution conique. L'angle limite de la surface déduit de cette étude est de $109^\circ 5$, qui est en bon accord avec les observations numériques de l'impact d'une goutte. La divergence de la vitesse est alors en $(t_0 - t)^{-1/3}$, pour des coordonnées dans l'espace physique fixées.

D'autres solutions auto-similaires ont été trouvées pour la formation de jets dans les bulles de cavitation [28] et conduisent à un potentiel d'une forme encore différente :

$$\varphi(r, z, t) = A(t) r^{1/4} P_{1/4}(\cos \theta)$$

Méthodes numériques

Le type d'écoulement que l'on cherche à résoudre est difficilement dissociable de l'outil numérique que l'on doit utiliser. Les équations de Navier-Stokes décrivent les écoulements de fluides visqueux newtoniens. Si l'on supprime les dimensions de ces équations en utilisant une vitesse de référence v_r et une longueur de référence l_r typiques de l'écoulement que l'on étudie, il apparaît un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{v_r l_r}{\nu}$$

La valeur de ce nombre est un des principaux critères du choix d'une méthode numérique. S'il est très petit, l'écoulement est dominé par la viscosité et on a recours à des méthodes spécifiques qui permettent de négliger les termes inertiels des équations. S'il est très grand, c'est l'inertie du fluide qui prédomine, d'autres méthodes sont alors utilisées. S'il prend des valeurs qui ne permettent de faire aucune de ces deux approximations, il est alors nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes complètes. Les méthodes numériques utilisées dans le cas où le nombre de Reynolds est très grand ou très petit sont dites intégrales car elles n'utilisent que des grandeurs définies sur l'enveloppe du domaine où se produit l'écoulement. N'ayant à distribuer des points de calcul que sur la frontière du domaine, on peut facilement les concentrer au niveau des échelles les plus petites. Par exemple, une idée simple consiste à employer une distribution de points fonction de la courbure locale de la surface. Néanmoins, résoudre les équations de Navier-Stokes complètes permet de quantifier l'importance des effets visqueux. Ces deux types de méthodes radicalement différentes ont donc des caractéristiques complémentaires.

Les écoulements qui nous intéressent ici sont des écoulements à surface libre. Peu de méthodes résolvant les équations de Navier-Stokes permettent de traiter

ce genre de problème. Les méthodes sur maillage déformable (Cf. Fig. 0.8) présentent de nombreuses qualités. La surface libre étant confondue avec les bords de certaines mailles, le traitement des termes surfaciques peut être effectué avec une grande précision. Néanmoins, ces méthodes présentent l'inconvénient de n'autoriser que de faibles déformations de la surface, sans quoi la redistribution des mailles de calcul est délicate, parfois impossible.

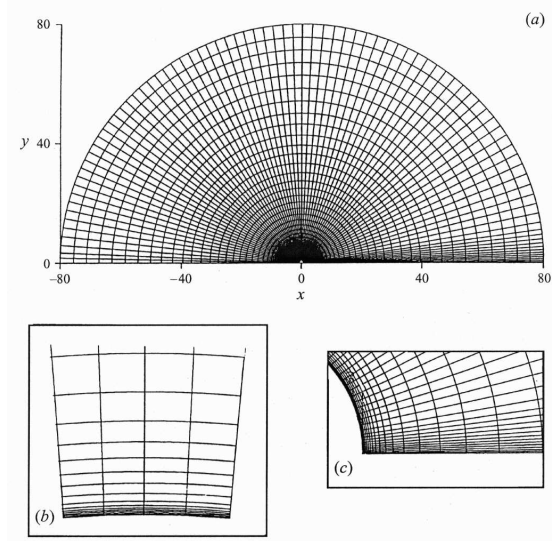


FIG. 0.8.: *Maillage adaptatif utilisé par l'équipe de J. Magnaudet pour l'étude de la dynamique des bulles.*

Une autre méthode, développée récemment par Stéphane Popinet et Stéphane Zaleski [38], propose de traiter l'interface à l'aide d'une chaîne de marqueurs [35], tandis que les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un maillage cartésien régulier fixe. Les termes surfaciques sont alors bien résolus et l'on n'est plus confronté au problème de maillage, puisque la grille reste fixe au cours du temps. La première partie de ce mémoire consiste en l'étude de l'éclatement d'une bulle à la surface, à l'aide de cette nouvelle technique. L'existence éventuelle de solutions auto-similaires de ce type d'écoulement et, *a fortiori* la présence de singularités géométriques, sont discutées.

Lorsque l'écoulement du fluide peut être supposé irrotationnel, la seule connaissance du potentiel des vitesses sur la frontière du domaine, suffit à la résolution du problème. De nombreuses méthodes intégrales ont ainsi été développées. Nous nous proposons d'en présenter deux : l'une applicable aux écoulements plans de fluides non visqueux, l'autre aux écoulements axi-symétriques. Ceci fait l'objet de la seconde partie de ce mémoire. La méthode pour les écoulements plans est alors utilisée pour résoudre les problèmes du déferlement de type

plongeant, puis une théorie permettant de prendre en compte de faibles effets visqueux est discutée. La méthode axi-symétrique est présentée en détail, puis appliquée, notamment, au cas de la coalescence de deux gouttes en apesanteur. A ce sujet, l'existence d'une singularité géométrique est mise en évidence.

Première partie

Interactions d'une bulle avec
une surface libre

Introduction

Lorsqu'une bulle est emportée sous la surface par une vague déferlante, elle subit l'action conjuguée des courants et de la poussée d'Archimède. Suivant sa taille et les contraintes auxquelles elle est soumise, elle peut se fragmenter pour donner naissance à plusieurs bulles plus petites. Durant sa remontée, sa surface se charge en molécules hydrophobes qui forment alors un film, modifiant localement ou globalement le coefficient de tension de surface. Arrivée à la surface, cette bulle se stabilise en déformant légèrement la surface ; cette situation d'équilibre instable peut durer plusieurs secondes, et ceci même en l'absence d'agents tensio-actifs, comme il a été remarqué expérimentalement [6]. Le film liquide mince surmontant la cavité se draine alors progressivement sous les effets de la tension de surface et de la gravité. Lorsque ce film devient suffisamment fin, il se rompt, éjectant ainsi dans l'atmosphère un grand nombre de gouttes de l'ordre du micron. Ce phénomène d'éclatement est extrêmement bref comparé à l'effondrement ultérieur de la cavité. En effet, le temps caractéristique d'un phénomène d'échelle spatiale e et essentiellement gouverné par la tension de surface s'écrit : $\tau = \sqrt{\rho e^3 / \sigma}$, où ρ est la masse volumique du liquide, σ son coefficient de tension de surface, et e , en l'occurrence, l'épaisseur du film. Il a été remarqué, expérimentalement, que les temps caractéristiques de la rupture du film et de l'effondrement de la cavité étaient respectivement de l'ordre de $100 \mu s$ et $10 ms$ (Cf. [41]). Le rapport des échelles spatiales du film et de la cavité est donc $l_f / l_c = 10^{-4/3} \simeq 0.05$. On peut donc, en première approximation, supposer que la rupture du film surmontant la cavité n'a pas d'effet sur l'effondrement de la cavité, étant données les différences d'échelles spatiales et temporelles des deux phénomènes. C'est en ayant fait cette hypothèse que l'étude qui suit a été effectuée.

De nombreuses études expérimentales et théoriques ont été menées pour comprendre la formation des gouttes de film et des gouttes de jet [6, 5, 44, 45, 46, 47, 48, 41]. Il en ressort principalement que les deux types de gouttes sont très différents. Les gouttes de film sont très nombreuses (parfois plusieurs milliers), tandis que le jet libère au maximum 5 gouttes beaucoup plus grosses. L'incidence de l'émission de ces gouttes sur les transferts de masse est donc certainement très différente.

Nous nous proposons, dans cette partie, d'étudier numériquement la formation du jet. La formation de jets aux interfaces a suscité de nombreuses recherches. La cause de ce phénomène est de différentes origines. Nous en avons retenues deux qui viennent compléter ou argumenter la présente étude :

- l’impact d’une goutte sur une surface liquide.

L’impact d’une goutte sur la surface d’un liquide (les deux liquides étant les mêmes) crée une cavité qui s’effondre sous l’effet de la tension de surface et de la poussée d’Archimède. On observe alors la naissance d’un jet vertical et, éventuellement, l’emprisonnement d’une bulle à la base de la cavité. Oguz et Prosperetti [34] ont effectué une étude numérique de ce phénomène. Il apparaît de nombreuses ressemblances avec l’éclatement d’une bulle à la surface d’un liquide, notamment l’entraînement d’air à la base de la cavité. Une analyse théorique a été effectuée par Longuet-Higgins [27] sur l’évolution de la surface libre lorsque la cavité s’effondre. Dans cette étude, il est montré qu’un angle de 109.5° correspond à une singularité de courbure. La tension de surface est prise en compte comme une perturbation de la solution conique.

- Les ondes de Faraday axi-symétriques.

Lorsqu’on remplit un récipient cylindrique de liquide et qu’on le soumet à des oscillations verticales, des ondes de Faraday naissent à la surface du liquide. Pour certaines valeurs de la fréquence et de l’amplitude des oscillations, on observe la formation d’un jet vertical très rapide au centre du récipient. Ce phénomène, étudié grâce à l’expérience, par Zeff et *al.* [55], s’apparente également à la naissance du jet lors de l’éclatement d’une bulle à la surface d’un liquide. Les auteurs font une analyse de l’équation de Bernoulli, donc dans le cadre d’un écoulement potentiel, et mettent en évidence la possible existence d’une singularité de courbure en temps fini à la base de la cavité. L’outil numérique est alors utilisé pour résoudre les équations de conservation et, cette fois, un angle limite du cône égal à 120° est mis en évidence. Cette formulation tient compte de l’effet de la tension de surface sur l’effondrement de la cavité.

Dans l’objectif de comprendre la formation du jet lors de l’éclatement d’une bulle à la surface, une étude complète est effectuée dans cette partie. Le premier chapitre traite de la forme statique de bulles accrochées à une surface libre. Le second chapitre expose la méthode des marqueurs utilisée. Une étude exhaustive de l’effondrement de la cavité est alors présentée dans le troisième chapitre. Les formes statiques obtenues à l’issue du premier chapitre sont utilisées pour initialiser les calculs, ainsi qu’une forme plus simple. Finalement, l’apparition de singularités de courbure à la base de la cavité et avant la formation du jet, est discutée.

1. Configuration statique d'une bulle accrochée à la surface libre

Si l'on cherche à étudier l'éclatement d'une bulle à la surface d'un liquide, la première question qui se pose est celle de la condition initiale à adopter. Le film séparant la bulle de l'atmosphère est très mince. Dans ce chapitre, nous négligerons son épaisseur par rapport aux dimensions de la bulle, ce qui revient à l'assimiler à une interface entre l'air contenu dans la bulle et l'atmosphère. Son coefficient de tension de surface est alors le double de celui d'une interface air-eau.

La cavité est déformée sous l'effet de la tension de surface et de la poussée d'Archimède. Pour de très petites bulles, le rayon de courbure de la surface étant petit, la force de tension de surface est dominante par rapport à la poussée d'Archimède et la forme de la bulle se rapproche de la sphère. Pour des bulles de plus grand volume, les effets de la gravité ne peuvent plus être négligés et la forme est alors imposée par les deux contraintes.

Dans ce chapitre, nous étudions la forme de bulles accrochées à une surface libre, ainsi que les comportements asymptotiques observés dans les limites des petits et grands rayons.

1.1. Théorie

La forme de particules solides ou fluides attachées à une interface a déjà été étudiée analytiquement et numériquement dans divers articles ([21, 50, 51]) et ouvrages ([39]). Néanmoins, il est intéressant d'essayer de prédire les lois d'évolution de certaines grandeurs du problème comme, par exemple, l'élévation de la bulle au dessus du niveau du liquide.

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de considérer trois milieux différents (Cf. Fig.1.1) : l'atmosphère (1), le gaz contenu dans la bulle (2) et le liquide (3). Le film liquide est alors considéré comme une interface entre l'atmosphère et l'air emprisonné dans la bulle. Cette hypothèse revient à supposer que l'épaisseur du film est négligeable par rapport aux dimensions du problème et que l'on peut ainsi négliger l'effet de la gravité sur celui-ci.

Si l'on suppose qu'il existe trois interfaces, et non pas deux comme le problème physique le suggère, il faut déterminer l'angle que font ces trois interfaces par rapport à leur ligne de contact (Cf. Fig.1.1). La force exercée sur cette ligne

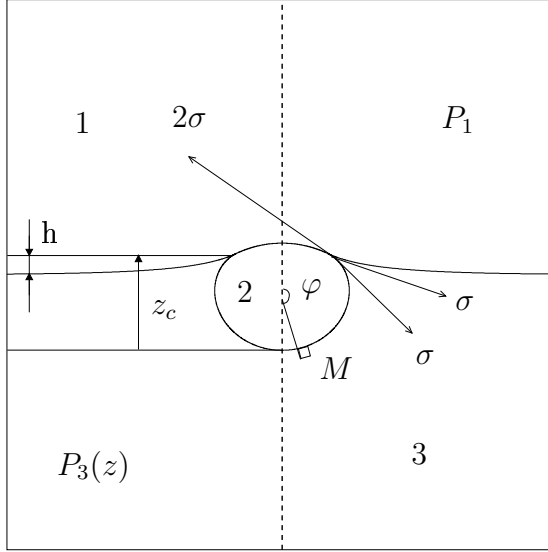


FIG. 1.1.: *Forme statique de bulle accrochée à la surface libre. Les trois vecteurs représentant la force de tension de surface sont en fait colinéaires. z_c et h sont deux inconnues du problème*

de contact par le film est proportionnelle à 2σ , tandis que les deux autres sont proportionnelles à σ . Le bilan de ces trois forces au point de concours montre de manière évidente que les trois surfaces doivent y concourir tangentiellement.

Il s'agit donc d'écrire un système d'équations pour chaque interface et de les résoudre de manière à ce que les trois solutions soient cohérentes.

Système d'équations pour la cavité

Au point M , la géométrie du problème étant axi-symétrique, les deux courbures principales sont :

$$\kappa_1 = \frac{\sin \varphi}{r} \quad \kappa_2 = \frac{d(\sin \varphi)}{dr} \quad (1.1)$$

où r et z sont les coordonnées cylindriques du point considéré dans un repère centré à la base de la cavité. Dans ce repère, si l'on néglige la poussée d'Archimède dans le gaz, le bilan des contraintes normales à l'interface s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \frac{d(r \sin \varphi)}{dr} = \frac{\Delta P_b}{\sigma} + \frac{\rho g z}{\sigma} \quad (1.2)$$

où ΔP_b est le saut de pression à la base de la cavité, ρ la masse volumique du liquide.

Connaissant le rayon de courbure R_b à la base de la cavité, on peut écrire cette équation sous la forme sans dimension suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{d(r \sin \varphi)}{dr} = 2 + B_o z \quad (1.3)$$

le nombre de Bond $B_o = \rho g R_b^2 / \sigma$ étant le seul paramètre sans dimension du problème. Dans cette équation, les distances ont été adimensionnées par R_b ; le saut de pression est connu et vaut $2\sigma/R_b$.

Une seconde équation est nécessaire à la résolution de la précédente et découle de la définition géométrique de φ , angle entre la normale à l'interface et la verticale :

$$\frac{dz}{dr} = -\tan \varphi \quad (1.4)$$

On peut utiliser φ comme paramètre et écrire ce système d'équations couplées de la manière suivante :

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r \cos \varphi}{r(2 + B_o z) - \sin \varphi} \quad (1.5)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi} \tan \varphi \quad (1.6)$$

où B_o est le nombre de Bond précédemment défini.

L'angle limite φ_c , correspondant au point d'intersection des trois interfaces, détermine entièrement la calotte sphérique surmontant la cavité. En effet, pour un angle φ_c donné, la solution (r_c, z_c) des précédentes équations permet de définir le rayon de la calotte sphérique : $R_c = r_c / \sin(\varphi_c)$.

Système d'équations pour le ménisque

Pour isoler la solution du problème des solutions précédentes, il faut déterminer la forme du ménisque, à proximité de la bulle. La hauteur h_∞ de liquide loin de la bulle doit être cohérente avec la pression imposée dans la bulle par la calotte sphérique. On peut écrire le saut de pression ΔP entre l'atmosphère et la bulle de deux manières différentes :

$$\Delta P = P_{atm} + \rho g h_\infty + \frac{2\sigma}{R_b} \quad \Delta P = P_{atm} + \frac{4\sigma}{R_c} \quad (1.7)$$

où R_c est la rayon de la calotte sphérique. En adimensionnant les longueurs par rapport à R_b , on obtient :

$$B_o h_\infty = \frac{4 \sin(\varphi_c)}{r_c} - 2 \quad (1.8)$$

Ne pouvant s'assurer, *a priori*, de la monotonie de φ , nous ne pouvons pas résoudre le système d'équations précédent pour obtenir le profil du ménisque. La technique utilisée ici consiste à supposer que la hauteur de liquide à proximité

de la bulle est une fonction de la distance à l'axe - ce qui correspond à la réalité. L'équation de Laplace pour le ménisque s'écrit, sous forme adimensionnée :

$$\Delta P = P_{atm} - P(z) = \frac{\sigma \kappa}{R_b} \quad \text{soit} \quad \frac{\sigma \kappa}{R_b} = \rho g R_b (h - h_\infty) \quad (1.9)$$

Si la hauteur d'eau est représentée par la fonction $h(r)$, on obtient :

$$B_o (h - h_\infty) = \frac{h'}{r \sqrt{(1 + h'^2)}} + \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \quad (1.10)$$

Plutôt que de résoudre directement cette équation du second degré, il est plus simple de résoudre, comme précédemment, un système d'équations du premier degré, en utilisant un changement de variable :

$$\frac{dh}{dr} = f(r) \quad (1.11)$$

$$\frac{df}{dr} = (1 + h'^2)^{3/2} \left(B_o (h - h_\infty) - \frac{f}{r \sqrt{(1 + f^2)}} \right) \quad (1.12)$$

la condition initiale pour la fonction f étant $f(r_c) = -\tan(\varphi_c)$.

Pour être la solution du problème global, la fonction $h(r)$ doit vérifier la condition à la limite :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = h_\infty \quad (1.13)$$

Méthode de résolution

La méthode utilisée ici peut être résumée ainsi :

- Pour un rayon de courbure à la base de la cavité fixé, la forme de cette cavité est calculée, jusqu'à un angle limite φ_c .
- Le système d'équations décrivant le ménisque est résolu. Suivant le comportement de la solution, c'est-à-dire si elle possède ou non une limite finie pour $r \gg 1$ et, le cas échéant, si cette limite est supérieure ou inférieure à h_∞ ; on effectue une dichotomie sur la valeur de φ_c jusqu'à obtenir une valeur acceptable de $\lim_{r \rightarrow \infty} h(r)$.

Pour les bulles de grande taille, la courbure à la base de la cavité devenant très petite, la résolution à l'aide de φ est alors imprécise. On a, dans ce cas, recours à la même méthode que pour le ménisque extérieur, c'est-à-dire que l'on utilise un pas constant en r pour la base de la cavité, jusqu'à ce que la formulation avec φ puisse être utilisée à nouveau.

1.2. Résultats

La figure 1.2 représente les profils obtenues pour des rayons équivalents (rayon de la sphère de même volume) variant de 1 à 9 mm, pour de l'eau. Le nombre

de Bond correspondant évolue entre 0.16 ($r_{eq} = 1\text{ mm}$) et 1585 ($r_{eq} = 9\text{ mm}$). Notons que pour un rayon équivalent d' 1 mm , la forme de la bulle est proche de la sphère, ce qui confirme le fait que la gravité ne joue pas un rôle prépondérant.

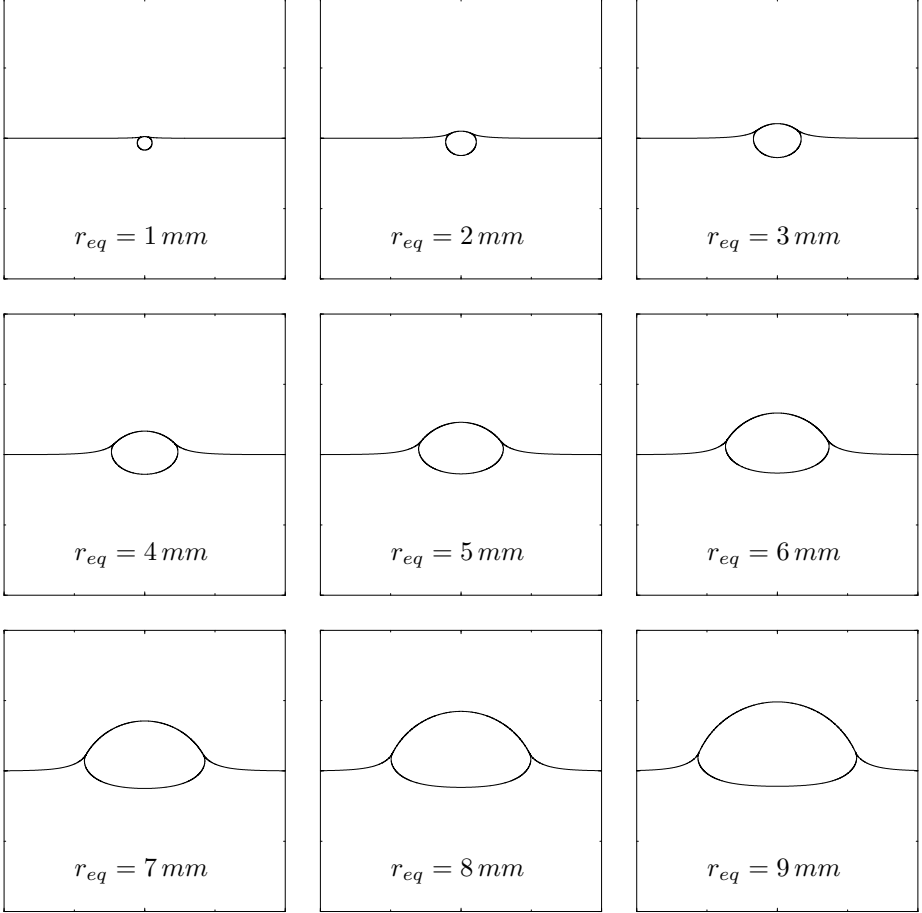


FIG. 1.2.: *Formes de bulles accrochées à la surface : le rayon équivalent r_{eq} est le rayon de la sphère de même volume. Les paramètres physiques utilisés sont ceux de l'eau.*

Lois d'échelles pour les petits rayons

Lorsque le rayon de la bulle est petit, on peut prédire le comportement de la différence de hauteur e entre la base de la bulle et le niveau de liquide. Si l'on suppose que l'élévation de la calotte sphérique au-dessus du niveau de liquide

est négligeable devant e , alors e doit évoluer comme le diamètre de la bulle :

$$e \sim 2R$$

Aucune théorie simple ne nous a permis de prédire le comportement de l'élévation de la calotte sphérique au-dessus du niveau à l'infini.

Lois d'échelles pour les grands rayons

Le comportement de h pour les bulles de grand rayon peut être prédit analytiquement. La figure 1.3 présente le résultat de quatre calculs effectués pour des valeurs de B_o égales, respectivement, à 1.10^7 , 9.10^{10} , 8.10^{14} et 7.10^{18} .

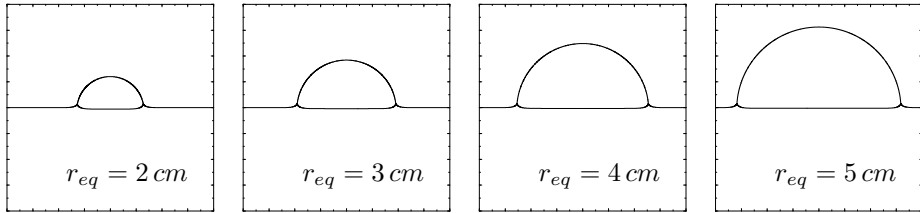


FIG. 1.3.: Formes statiques de bulles pour des grandes valeurs de B_o

On constate que pour cette gamme de volumes, la bulle peut être assimilée, en première approximation, à une demi sphère de rayon h , à laquelle il faut ajouter le volume de gaz sous le niveau de la surface libre. Cette hypothèse permet de relier h au rayon équivalent :

$$\frac{4}{3}\pi r_{eq}^3 = \frac{2}{3}\pi h^3 + \pi h^2 e \quad (1.14)$$

où e est la différence de hauteur entre le niveau de liquide et la base de la cavité.

Si l'on suppose $B_o \gg 1$, le saut de pression à la base de la cavité est négligeable, ce qui nous conduit à écrire le saut de pression entre l'intérieur de la bulle et l'atmosphère de deux manières différentes :

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{h} = \rho g e \quad (1.15)$$

Les deux équations précédentes donnent les comportements de h et e en fonction du rayon équivalent, pour $h \gg 1$:

$$h \sim 2^{1/3} r_{eq} \quad (1.16)$$

$$e \sim \frac{4\sigma}{\rho g 2^{1/3} r_{eq}} \quad (1.17)$$

Comportements de h et e

Les calculs ont été effectués pour une large gamme des valeurs de B_o , ce qui permet de vérifier les comportements asymptotiques attendus. La figure 1.4 présente les valeurs obtenues pour h et e en fonction du rayon équivalent, ainsi que les lois obtenues précédemment.

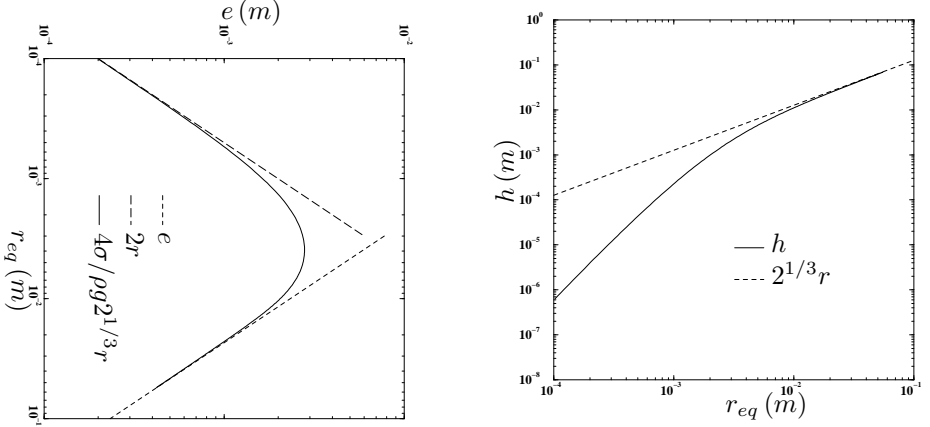


FIG. 1.4.: *Formes de bulles accrochées à la surface : le rayon équivalent r_{eq} est le rayon de la sphère de même volume. Les comportements asymptotiques prédits pour h et e sont bien respectés pour les petites et les grandes valeurs du rayon équivalent.*

On constate que les deux lois asymptotiques pour e sont en très bon accord avec les résultats numériques, ainsi que la loi obtenue pour h lorsque $B_o \gg 1$.

1.3. Conclusions

Dans ce chapitre, la forme statique d'une bulle accrochée à la surface libre a été étudiée en fonction de son volume. On constate que pour des bulles dont le rayon équivalent dépasse un millimètre, la gravité joue un rôle non négligeable, à savoir qu'elle éloigne notablement la forme de la cavité de la sphère. La connaissance de la forme de ces bulles va nous être utile : dans le chapitre 3, une comparaison de l'éclatement d'une bulle est effectuée entre des résultats expérimentaux et numériques. La forme utilisée pour initialiser les calculs est le résultat de l'étude numérique qui précède.

2. Méthode des marqueurs avec surface libre

La méthode que nous avons utilisée pour étudier l'éclatement d'une bulle à la surface d'un liquide est la méthode des marqueurs. Cette méthode développée par Stéphane Popinet et Stéphane Zaleski [38], permet de résoudre les équations de Navier-Stokes axi-symétriques en présence d'une surface libre. Plusieurs caractéristiques de cette méthode nous incitent à l'utiliser pour résoudre ce type de problèmes :

- Les équations de Navier Stokes sont résolues, et non pas un régime limite d'écoulement tel que les écoulements de Stokes ou les écoulements potentiels. Cela nous permet d'accéder à une information comme la vorticité qui peut traduire l'importance des effets visqueux.
- La surface étant décrite par une chaîne de marqueurs, les termes surfaciques – et notamment le terme de tension de surface – sont résolus avec une grande précision. On s'attend à ce que la tension de surface ait un rôle prépondérant dans le phénomène d'effondrement d'une bulle à la surface. Il est donc très important de rendre compte précisément de cette importance, ce que ne permettent pas encore, à l'heure actuelle, les autres méthodes.

Nous décrivons ici brièvement la méthode des marqueurs avec surface libre. Tous les détails de cette méthode sont expliqués dans [38, 37, 36].

2.1. Maillage et discrétisation des équations

La formulation de type volumes finis des équations de Navier Stokes incompressibles en géométrie axi-symétrique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} r \, dr \, dz + \int_{\partial\Omega} r(v_z - u_z) \, dr - \int_{\partial\Omega} r(v_r - u_r) \, dz = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} v_r r \, dr \, dz + \int_{\partial\Omega} r v_r (v_z - u_z) \, dr - \int_{\partial\Omega} r v_r (v_r - u_r) \, dz = \quad (2.2)$$

$$\int_{\partial\Omega} \phi r \, dz + \int_{\Omega} \phi \, dr \, dz + \int_{\partial\Omega} r S_{zr} \, dr - \int_{\partial\Omega} r S_{rr} \, dz - \int_{\Omega} S_{\theta\theta} \, dr \, dz, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} v_z r \, dr \, dz + \int_{\partial\Omega} r v_z (v_z - u_z) \, dr - \int_{\partial\Omega} r v_z (v_r - u_r) \, dz = \quad (2.3)$$

$$- \int_{\partial\Omega} \phi r \, dr + \int_{\partial\Omega} r S_{zz} \, dr - \int_{\partial\Omega} r S_{zr} \, dz.$$

où Ω est un volume fermé, \mathbf{u} la vitesse de la frontière $\partial\Omega$, $\phi = p/\rho$ et le tenseur des contraintes s'exprime sous la forme :

$$S_{rr} = 2\nu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (2.4)$$

$$S_{\theta\theta} = 2\nu \frac{v_r}{r} \quad (2.5)$$

$$S_{zz} = 2\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$S_{zr} = S_{rz} = \nu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \quad (2.7)$$

Ces équations sont valables pour un domaine Ω dont les frontières sont fixes ou mobiles. Cette formulation peut donc s'appliquer aux mailles traversées par la surface libre, comme aux autres.

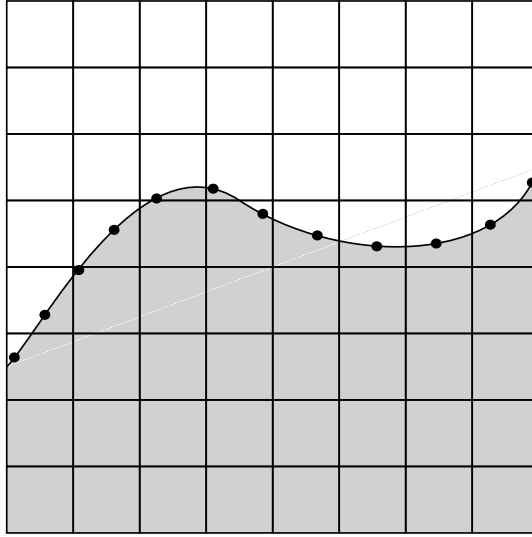


FIG. 2.1.: Méthode des marqueurs avec surface libre. Les équations de Navier Stokes sont discrétisées sur un maillage fixe régulier cartésien. La surface libre est représentée explicitement par une chaîne de marqueurs, reliés entre eux par des fonctions splines cubiques.

Considérons une maille de calcul traversée par l'interface (Cf. Fig. 2.2). Le domaine Ω est constitué de la surface libre se déplaçant à la vitesse du fluide et des quatre segments fixes AB , BC , DE et EA . On peut donc écrire les

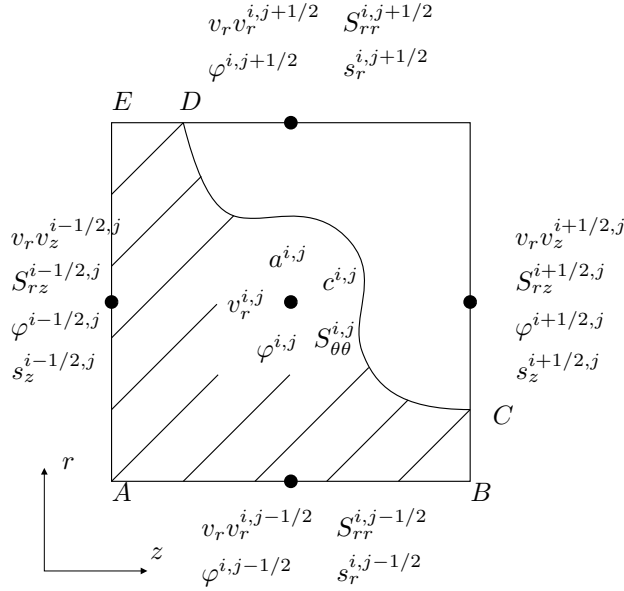


FIG. 2.2.: Cellule de calcul traversée par l'interface.

équations de Navier-Stokes en séparant les intégrales linéiques sur le contour $\partial\Omega$. Par exemple, l'équation 2.2 devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} v_r r \, dr \, dz + \int_{BC \cup EA} r v_r v_z \, dr - \int_{AB \cup DE} r v_r^2 \, dz = & \quad (2.8) \\
 \int_{AB \cup DE} \phi r \, dz + \int_{CD} \phi r \, dz + \int_{\Omega} \phi \, dr \, dz + \\
 \int_{BC \cup EA} r S_{zr} \, dr + \int_{CD} r S_{zr} \, dr - \\
 \int_{AB \cup DE} r S_{rr} \, dz - \int_{CD} r S_{rr} \, dz - \int_{\Omega} S_{\theta\theta} \, dr \, dz.
 \end{aligned}$$

Supposons que les quantités utilisées sont définies soit au centre de la cellule, soit sur les faces. Supposons également que les quantités définies au centre sont constantes dans toute la cellule et que celles définies sur un bord sont constantes sur ce bord. Posons :

$$\begin{aligned}
 s_r^{i,j} &= \int_{AB \cup DE} r \, dz \\
 s_z^{i,j} &= \int_{BC \cup EA} r \, dr \\
 a^{i,j} &= \int_{\Omega} dr \, dz
 \end{aligned}$$

$$c^{i,j} = \int_{\Omega} r \, dr \, dz$$

L'équation 2.8 s'écrit alors sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(cv_r)^{i,j}] + (s_z v_r v_z)^{i+1/2,j} - (s_z v_r v_z)^{i-1/2,j} + \\ (s_r v_r^2)^{i,j+1/2} - (s_r v_r^2)^{i,j-1/2} = \\ (s_r \phi)^{i,j-1/2} - (s_r \phi)^{i,j+1/2} + (a\phi)^{i,j} + \int_{int} \phi r \, dz + \\ (s_z S_{zr})^{i+1/2,j} - (s_z S_{zr})^{i-1/2,j} + \int_{int} r S_{zr} \, dr + \\ (s_r S_{rr})^{i,j+1/2} - (s_r S_{rr})^{i,j-1/2} - \int_{int} r S_{rr} \, dz - (aS_{\theta\theta})^{i,j}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où \int_{int} désigne l'intégrale le long du morceau d'interface contenu dans Ω . L'équation pour la composante suivant z est obtenue de manière analogue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(cv_z)^{i,j}] + (s_z v_z^2)^{i+1/2,j} - (s_z v_z^2)^{i-1/2,j} + \\ (s_r v_r v_z)^{i,j+1/2} - (s_r v_r v_z)^{i,j-1/2} = \\ (s_z \phi)^{i-1/2,j} - (s_z \phi)^{i+1/2,j} - \int_{int} \phi r \, dr + \\ (s_z S_{zz})^{i+1/2,j} - (s_z S_{zz})^{i-1/2,j} + \int_{int} r S_{zz} \, dr + \\ (s_r S_{zr})^{i,j+1/2} - (s_r S_{zr})^{i,j-1/2} - \int_{int} r S_{zr} \, dz. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les produits v_r^2 , v_z^2 , et $v_r v_z$ sont calculés comme des moyennes des vitesses radiales et longitudinales ; les quantités S_{rr} , S_{zz} et S_{rz} sont calculées grâce à des différences finies d'ordre un.

Etant donné que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} r \, dr \, dz = \int_{\partial\Omega} r u_z \, dr - \int_{\partial\Omega} r u_r \, dr$$

la condition d'incompressibilité peut s'écrire différemment :

$$\int_{\partial\Omega} r v_z \, dr - \int_{\partial\Omega} r v_r \, dr = 0$$

expression qui s'écrit sous la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned} (s_z v_z)^{i+1/2,j} - (s_z v_z)^{i-1/2,j} + \int_{int} r v_z \, dr + \\ (s_r v_r)^{i,j+1/2} - (s_r v_r)^{i,j-1/2} - \int_{int} r v_r \, dz = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2. Méthode de projection

La méthode utilisée pour résoudre les équations discrétisées est une méthode de projection déjà employée dans le cadre de la méthode Volume Of Fluid (V.O.F.) [19]. Le champ de vitesses au temps $n + 1$ est obtenu en deux étapes :

- Un champ intermédiaire \mathbf{v}^* est calculé en utilisant une discrétisation du premier ordre en temps, en excluant les termes de gradient de pression.
- Le champ de pression est calculé de manière à assurer l'incompressibilité de l'écoulement. Cette condition nécessite la résolution d'une équation de Poisson. La matrice associée étant mal conditionnée, la méthode utilisée pour inverser le système est une méthode de relaxation multigrille.

Une fois le champ \mathbf{v}^* calculé, le champ de vitesses au temps $n + 1$ s'écrit, sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} v_r^{i,j} &= (v_r^*)^{i,j} + \frac{\Delta t}{c^{i,j}} \left[(s_r \phi)^{i,j-1/2} - (s_r \phi)^{i,j+1/2} + (a\phi)^{i,j} \right] \\ v_z^{i,j} &= (v_z^*)^{i,j} + \frac{\Delta t}{c^{i,j}} \left[(s_z \phi)^{i-1/2,j} - (s_z \phi)^{i+1/2,j} \right] \end{aligned}$$

L'équation de Poisson est obtenue en imposant la nullité de la divergence de la vitesse au temps $n + 1$. L'intégration le long de l'interface des deux composantes de la vitesse nécessite de pouvoir exprimer le champ de vitesse à une position quelconque à l'intérieur de la cellule. Pour ce faire, nous supposons que chaque composante de la vitesse varie continûment d'un bord à l'autre de la cellule, soit :

$$v_z(z)h = (z - z_{i-1/2})v_z^{i+1/2,j} - (z - z_{i+1/2})v_z^{i-1/2,j}, \quad (2.12)$$

$$v_r(r)h = (r - r_{j-1/2})v_r^{i,j+1/2} - (r - r_{j+1/2})v_r^{i,j-1/2}. \quad (2.13)$$

Les intégrales intervenant dans (2.11) sont alors obtenues comme :

$$\int_{int_{i,j}} r v_z \, dr = \quad (2.14)$$

$$\frac{v_z^{i+1/2,j}}{h} \int_{int_{i,j}} r(z - z_{i-1/2}) \, dr - \frac{v_z^{i-1/2,j}}{h} \int_{int_{i,j}} r(z - z_{i+1/2}) \, dr,$$

$$\int_{int_{i,j}} r v_r \, dz = \quad (2.15)$$

$$\frac{v_r^{i,j+1/2}}{h} \int_{int_{i,j}} r(r - r_{j-1/2}) \, dz - \frac{v_r^{i,j-1/2}}{h} \int_{int_{i,j}} r(r - r_{j+1/2}) \, dz.$$

En remplaçant \mathbf{v} par son expression en fonction de \mathbf{v}^* et en utilisant les relations ci-dessus, la condition d'incompressibilité (2.11) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[(s'_z v_z^*)^{i+1/2,j} - (s'_z v_z^*)^{i-1/2,j} + (s'_r v_r^*)^{i,j+1/2} - (s'_r v_r^*)^{i,j-1/2} \right] + \\ & \phi^{i,j} \left[s_z^{i,j} \left((s'_z/c)^{i+1/2,j} + (s'_z/c)^{i-1/2,j} \right) + s_r^{i,j} \left((s'_r/c)^{i,j+1/2} + (s'_r/c)^{i,j-1/2} \right) \right] + \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi^{i,j}}{2} \left[(as'_r/c)^{i,j+1/2} - (as'_r/c)^{i,j-1/2} \right] = \\ & (s_z\phi)^{i+1,j} (s'_z/c)^{i+1/2,j} + \\ & (s_z\phi)^{i-1,j} (s'_z/c)^{i-1/2,j} + \phi^{i,j+1} (s'_r/c)^{i,j+1/2} \left(s_r^{i,j+1} - \frac{1}{2} a^{i,j+1/2} \right) + \\ & \phi^{i,j-1} (s'_r/c)^{i,j-1/2} \left(s_r^{i,j-1} + \frac{1}{2} a^{i,j-1/2} \right), \end{aligned}$$

ou s'_z et s'_r sont définis par :

$$(s'_z)^{i\pm 1/2,j} = s_z^{i\pm 1/2,j} + \frac{1}{h} \int_{int_{i,j}} r(z - z_{i\mp 1/2}) dr, \quad (2.17)$$

$$(s'_r)^{i,j\pm 1/2} = s_r^{i,j\pm 1/2} - \frac{1}{h} \int_{int_{i,j}} r(r - r_{j\mp 1/2}) dz. \quad (2.18)$$

Cette équation est de la forme :

$$\alpha\phi^{i,j} + \beta\phi^{i+1,j} + \gamma\phi^{i-1,j} + \zeta\phi^{i,j+1} + \xi\phi^{i,j-1} = \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (2.19)$$

et peut donc être résolue en utilisant une méthode multigrille.

Extrapolation du champ de vitesses

Le calcul des différences finies sur les cellules proches de la surface libre nécessite la connaissance du champ de vitesses sur des cellules extérieures au domaine de calcul. Il faut donc extrapoler le champ de vitesses, tout en respectant les conditions aux limites sur la surface, relatives aux contraintes normale et tangentielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_S &= \sigma\kappa \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_S &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

où σ est le coefficient de tension de surface, κ la courbure moyenne locale de la surface, \mathbf{n} et \mathbf{t} la normale et la tangente à la surface, $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$ le tenseur des contraintes.

La condition à la limite des contraintes normales est vérifiée, puisque utilisée pour le calcul des termes $\int \phi r dr$ et $\int \phi r dz$ de l'expression de \mathbf{v}^* . L'extrapolation est donc faite en accord avec la condition de contrainte tangentielle nulle. Les détails de cette extrapolation sont expliqués dans [36, 38].

Description de la surface libre

Les marqueurs sont reliés entre eux par des fonctions splines cubiques. Ce choix est directement lié à la précision que requière le calcul de la courbure. En

effet, les splines cubiques étant de classe \mathcal{C}_2 , leur dérivée seconde est continue le long de la surface. La courbure, faisant intervenir des dérivées secondes de $r(s)$ et $z(s)$, est alors également continue. L'abscisse curviligne est approximée par la fonction s , croissante le long de la surface, et définie en chaque point (r_i, z_i) par :

$$s_i = \sum_{j=0}^{i-1} \sqrt{(r_{j+1} - r_j)^2 + (z_{j+1} - z_j)^2}$$

Les fonctions splines sont alors déterminées pour les couples de points (s_i, r_i) et (s_i, z_i) , et grâce à la connaissance des dérivées premières de r et z en chacune des deux extrémités de la surface (Cf. Fig. 2.3).

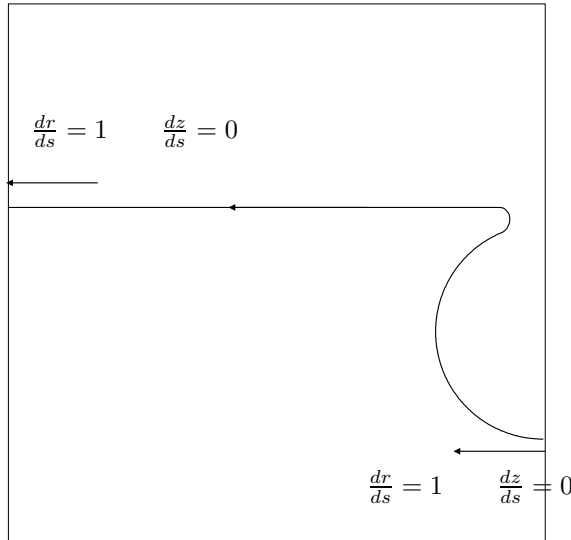


FIG. 2.3.: Dérivées suivant l'abscisse curviligne de r et de z à chaque extrémité de la surface.

Les marqueurs sont advectés grâce à une interpolation bilinéaire des vitesses calculées sur la grille fixe. Pour résoudre les mêmes échelles uniformément sur toute la surface, les marqueurs sont redistribués à chaque pas de temps de telle sorte qu'il y en ait au moins un dans chaque cellule. Cette redistribution est effectuée à l'aide des fonctions splines.

2.3. Tests de validation

Des tests de validation ont été effectués, notamment sur la formation d'un jet dans les bulles de cavitation [38], l'instabilité de Rayleigh-Taylor et les oscilla-

tions amorties de bulles [36]. Ces études mettent en évidence la grande robustesse de cette technique de calcul.

L'exemple de test de validation que nous présentons très brièvement ici consiste en l'étude de l'ascension de bulles. Cette validation est présentée en détail dans la thèse de Stéphane Popinet [36]. Pour éviter une diminution de la pression dans la bulle qui aurait pour conséquence une augmentation de son volume, ces tests ont été effectués avec un écoulement de liquide vers le bas, ajusté de telle sorte que les forces de traînée agissant sur la bulle équilibrent la poussée d'Archimède. Cette technique permet de s'affranchir du problème de variation de volume de la bulle et une comparaison avec l'expérience est alors possible. La figure 2.4 représente la vitesse obtenue en fonction du rayon équivalent d'une bulle remontant dans du *Varsol*.

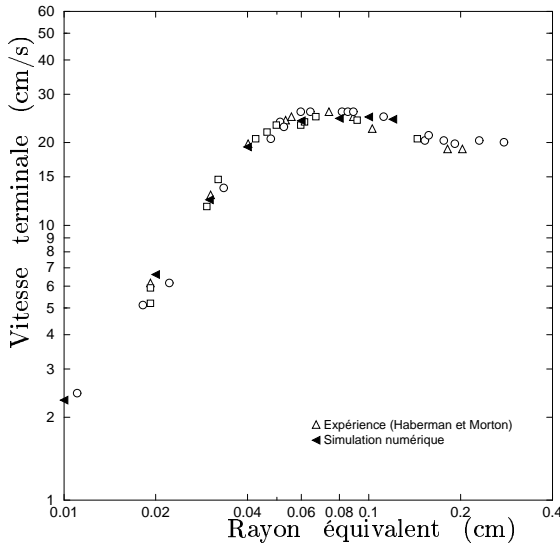


FIG. 2.4.: *Vitesses terminales obtenues expérimentalement et par simulation numérique pour des bulles d'air se déplaçant dans du Varsol.*

2.4. Conclusion

Cette méthode de calcul présente des avantages par rapport, notamment, aux méthodes V.O.F., vis-à-vis du type de problèmes que nous cherchons à traiter. Grâce à la correction sur le gradient de pression décrite dans [37], la résolution des équations n'induit pas de courants parasites, contrairement aux autres méthodes sur maillage fixe. L'effondrement d'une petite cavité étant un phénomène dominé par la tension de surface, cet avantage devient une nécessité. En outre, la

résolution des équations de Navier-Stokes permet de mesurer l'importance de la viscosité, grandeur qui peut, comme nous le verrons plus loin, avoir une influence sur l'écoulement, même pour un fluide faiblement visqueux comme l'eau.

3. Eclatement d'une bulle à la surface d'un liquide

Le phénomène d'éclatement d'une bulle à la surface d'un liquide peut être décomposé en deux étapes bien distinctes : la rupture du film mince surmontant la cavité, puis l'effondrement de cette cavité principalement sous l'effet de la tension de surface. Ces deux phénomènes font intervenir des échelles spatiales et temporelles très différentes. En effet, il a été remarqué, expérimentalement, que les temps caractéristiques de la rupture du film et de l'effondrement de la cavité étaient respectivement de l'ordre de $100\ \mu s$ et $10\ ms$ [41]. En outre, les échelles spatiales sont également très différentes.

Ces constats nous incitent à négliger l'influence de la rupture du film sur le phénomène d'effondrement de la cavité. De même, au vu de la taille des bulles considérées, on peut supposer infiniment brève la phase pendant laquelle, après l'éclatement du film, les pressions à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité s'équilibrent. Une troisième hypothèse a été faite dans le cadre de notre étude : nous avons supposé que l'air n'avait pas d'influence sur la formation du jet, ce qui nous a permis d'utiliser le code marqueurs avec surface libre. Une des motivations de cette approximation vient du fait que si l'on prend l'air en compte, au nombre de paramètres décrivant le phénomène s'ajoutent la viscosité, la masse volumique de l'air. Il est alors beaucoup plus difficile de prédire le comportement du jet analytiquement. Les résultats obtenus dans cette étude doivent donc être associés à ces approximations, sachant qu'il est toujours possible, après calcul, d'évaluer la validité de telle ou telle hypothèse.

3.1. Lois d'échelles en théorie potentielle

L'évolution d'une surface libre au cours du temps, ainsi que des champs de vitesses et de pression, dépendent de plusieurs paramètres physiques : la viscosité cinématique du fluide ν , sa densité ρ , son coefficient de tension de surface σ , ses dimensions (par exemple le volume de la cavité ou le rayon équivalent R de la bulle) et l'accélération de la pesanteur g (la surface étant au repos à l'instant initial, aucune vitesse n'intervient). A l'aide de ces paramètres, il est possible de construire deux et seulement deux nombres sans dimension : le nombre de Ohnesorge et le nombre de Bond :

$$Oh = \rho\nu^2/\sigma R \quad (3.1)$$

$$Bo = \rho g R^2 / \sigma \quad (3.2)$$

A chacun de ces nombres sans dimension correspond une longueur : $R_\nu = \rho \nu^2 / \sigma$, appelée longueur capillo-visqueuse est la longueur à laquelle les contraintes superficielles et visqueuses s'équilibrent ; $R_g = \sqrt{\sigma / \rho g}$, la longueur gravitato-capillaire est l'échelle à laquelle les contraintes superficielles et dues à la gravité sont comparables. Pour de l'eau pure, c'est-à-dire en choisissant $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\sigma = 0.072 \text{ kg.s}^{-2}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$, ces longueurs sont respectivement $0.014 \text{ }\mu\text{m}$ et 2.7 mm . On s'attend donc à ce que, pour une large gamme d'échelles comprise entre ces deux longueurs, ni la gravité, ni la viscosité n'aient une réelle influence sur le phénomène.

Les vitesses et pressions sans dimension, caractéristiques de l'écoulement peuvent s'exprimer sous la forme de fonctions des nombres sans dimension (Cf. [2]) :

$$V \sqrt{\frac{\rho R}{\sigma}} = f_v(Oh, Bo) \quad (3.3)$$

$$P \frac{R}{\sigma} = f_p(Oh, Bo) \quad (3.4)$$

Si l'on suppose que les effets de la viscosité et de la gravité sont négligeables ($R_\nu \ll R \ll R_g$), une analyse dimensionnelle classique montre que les vitesse et pression caractéristiques se comportent comme :

$$V \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (3.5)$$

$$P \sim \frac{\sigma}{R} \quad (3.6)$$

On peut également écrire cette dépendance en divisant le rayon de la bulle par R_ν :

$$V \frac{\rho \nu}{\sigma} \sim \left(\frac{R}{R_\nu} \right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

$$P \frac{\rho \nu^2}{\sigma^2} \sim \left(\frac{R}{R_\nu} \right)^{-1} \quad (3.8)$$

3.2. Comparaison avec l'expérience

Dans un premier temps, et dans le but de valider le code numérique pour ce type de problèmes, une comparaison avec des résultats expérimentaux a été effectuée (Cf. fig 3.1). Les profils expérimentaux utilisés sont issus d'un article de F. MacIntyre [30] et sont séparés de $1/6000 \text{ s}$.

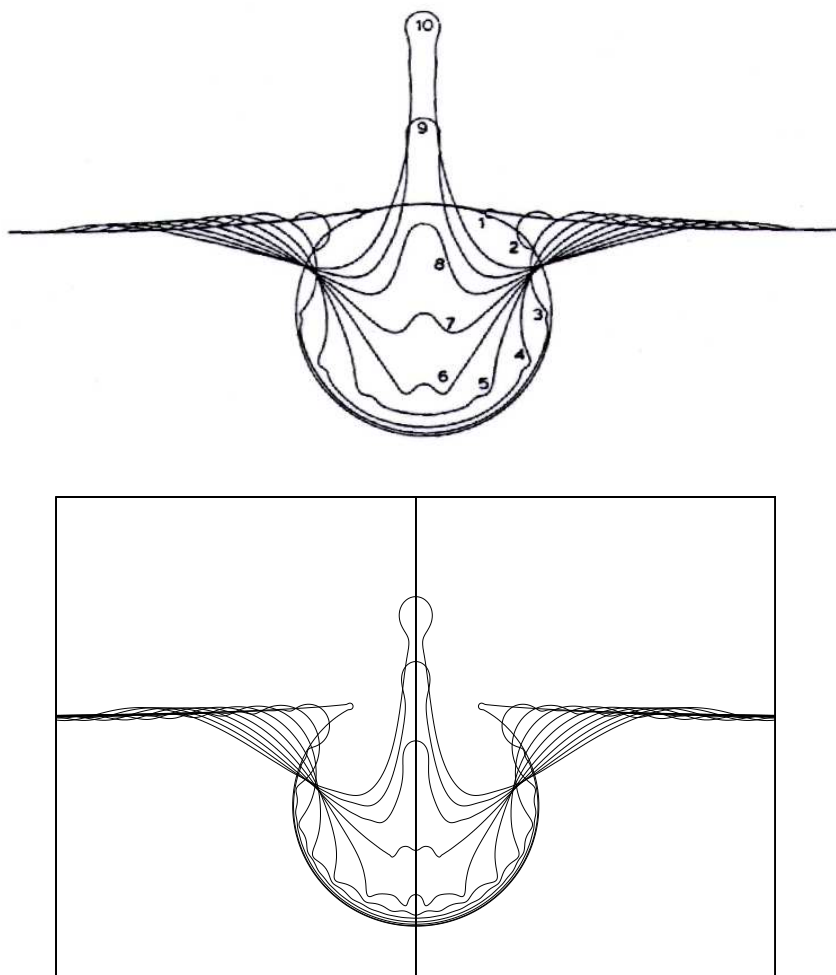


FIG. 3.1.: *Profils successifs de l'éclatement d'une bulle de $2.57 \mu\text{l}$: résultats expérimentaux et numériques. Les profils sont séparés de $\sim 1/6000 \text{ s}$*

Pour le calcul, les paramètres physiques de l'eau ont été utilisés : $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 0.072 \text{ kg s}^{-2}$; et la gravité a été prise en compte. La condition initiale utilisée a été obtenue à partir de l'étude des formes statiques de bulles.

On constate un très bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux. Aux instants initiaux, le bourrelet se rétracte, donnant naissance à une série d'ondes capillaires qui convergent à la base de la cavité. A ces ondes capillaires se superpose le mouvement d'ensemble d'effondrement de la cavité. Puis un jet vertical se développe et se fragmente en une ou plusieurs gouttes sous l'effet de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Le calcul présenté ici a été interrompu peu avant la première rupture pour des raisons purement numériques. En effet, la méthode des marqueurs laissant à l'utilisateur la liberté de déconnecter des interfaces, il s'agit de le faire en accord avec les lois physiques gouvernant la rupture. Notre propos n'étant pas d'étudier le détail de cette rupture, mais plutôt la naissance du jet, nous n'avons pas jugé nécessaire de poursuivre le calcul plus avant.

Malgré ce bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques, deux remarques peuvent être faites : la quantité d'ondes capillaires est plus importante sur les profils numériques et l'instabilité de Rayleigh-Plateau du jet apparaît plus tôt sur les résultats du calcul. Le coefficient de tension de surface – difficile à évaluer expérimentalement, ou l'imprécision sur le volume de la bulle peuvent être responsables de ces différences. Notons également que la présence de contaminants tensio-actifs sur l'interface peut modifier localement le coefficient de tension de surface.

Le premier profil expérimental est issu d'une étude numérique – similaire à la notre – de formes statiques de bulles. Les profils suivants ont été obtenus grâce à une reconstruction numérique de la surface, à l'aide de photographies de l'expérience. MacIntyre précise que l'interface n'était pas explicitement visible ; une méthode minimisant la surface a donc été utilisée pour obtenir ces profils. Cette reconstruction, si elle ne permet pas de rendre compte rigoureusement de la forme des ondes capillaires, permet néanmoins de s'assurer de leur existence.

Champs de vorticité

Lorsqu'un fluide est peu visqueux, et si l'écoulement ne présente pas de vorticité à l'instant initial, la vorticité reste confinée dans une mince couche limite à proximité de la surface. Dans le cadre de notre étude numérique, nous nous sommes intéressés à la vorticité dans l'écoulement. Les figures 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 représentent $\partial v / \partial r - \partial u / \partial z$ où u est la vitesse radiale et v longitudinale. Le champ de vorticité se développe au cours du phénomène et se détache de la surface libre à l'instant de formation du jet. Cette vorticité permet de mettre en évidence la présence d'un jet descendant. Notons que l'intensité de cette vorticité est comparable à celle présente dans le jet vertical, ce qui prouve que pour les échelles de longueurs et les courbures considérées, la vorticité ne reste pas confinée dans une couche limite.

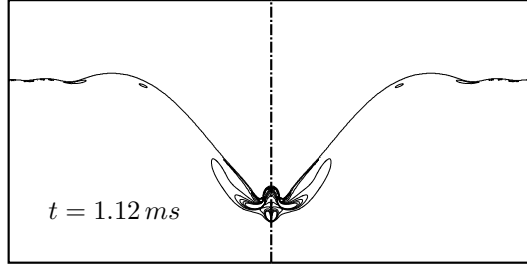


FIG. 3.2.: Lignes de niveau de la vorticité dans l'écoulement. Elle sont séparée de $0.96 s^{-1}$, la valeur maximale représentée est de $4.80 s^{-1}$, la valeur minimale de $-4.80 s^{-1}$. On constate qu'il existe une région, dans le jet ascendant, pour laquelle la vorticité est supérieure à $4.80 s^{-1}$, ainsi qu'une région, dans le jet descendant, où elle est inférieure à $-4.80 s^{-1}$. En outre, les valeurs maximales rencontrées (en valeur absolue) sont du même ordre de grandeur que $4.80 s^{-1}$.

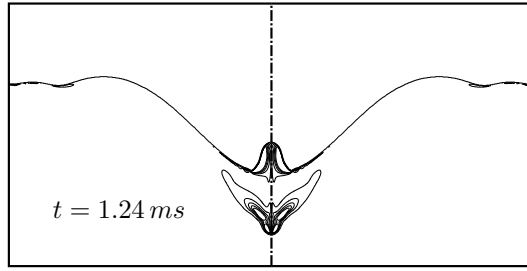


FIG. 3.3.: Idem Fig. 3.2

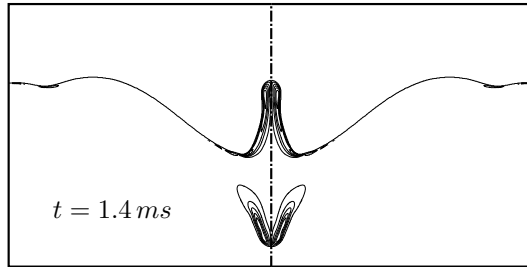


FIG. 3.4.: Idem Fig. 3.2

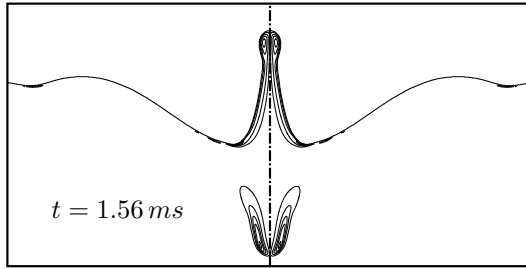


FIG. 3.5.: *Idem* Fig. 3.2

3.3. Etude paramétrique

Comme nous l'avons vu précédemment, l'échelle de longueur pour laquelle les effets capillaires et gravitaires sont équilibrés, pour de l'eau pure, est de 2.7 mm . On peut donc, *a priori*, supposer que la gravité est négligeable pour les bulles de rayon petit devant cette longueur. Le seul nombre sans dimension gouvernant le phénomène, dans le cadre de cette étude paramétrique, est donc le nombre de Ohnesorge $Oh = \rho\nu^2/\sigma R$. Toutes les mesures ci-après sont présentées en fonction de l'inverse de ce nombre, c'est-à-dire le rayon de la bulle sur la longueur capillo-visqueuse.

De manière à assurer la cohérence avec le fait de négliger la gravité, et pour simplifier l'étude paramétrique, une forme initiale similaire pour toutes les bulles a été utilisée comme condition initiale (Cf. Fig 3.6). Un maillage 512^2 a été utilisé, suite à une étude sur la convergence du code pour ce genre de problèmes.

Valeurs mesurées

L'intérêt principal de cette étude est la possibilité qu'elle offre de confirmer ou d'infirmer les lois d'échelles prédites par la théorie potentielle. On peut également, même si la condition initiale est simplifiée, comparer les résultats avec les mesures expérimentales. La vitesse et le volume de la première goutte de jet émise détermine son comportement ultérieur, c'est-à-dire si elle retombe où s'évapore, laissant dans l'atmosphère les molécules et particules dont elle est chargée. Une grandeur importante à extraire du résultat des calculs est la vitesse de cette goutte ou, plus simplement, la vitesse du jet.

Si l'on regarde la vitesse du point se trouvant sur l'axe de symétrie en fonction du temps (Cf. Fig. 3.7), on remarque d'abord qu'après une période d'oscillations de faible amplitude, la vitesse passe brusquement d'une valeur négative à une valeur positive de l'ordre de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La naissance du jet est donc un phénomène violent – pour une bulle d'un rayon égal à $R/R_\nu = 2.88 \cdot 10^5$, soit 4 mm pour de l'eau, mais également pour de plus petites bulles – comparé aux phénomène d'effondrement de la cavité. Les oscillations de la vitesse avant l'extremum

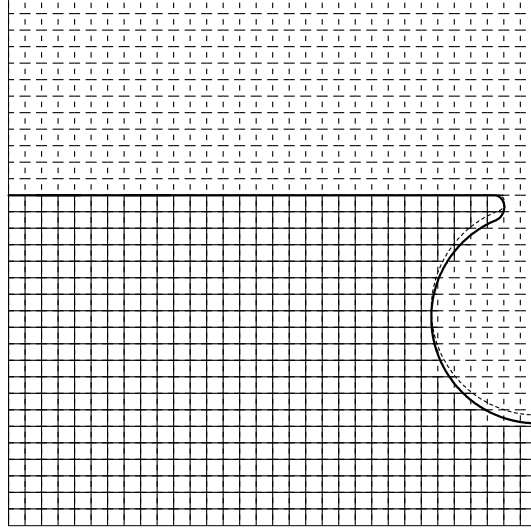


FIG. 3.6.: Conditions initiales adoptées pour l'étude paramétrique. Schématiquement, les mailles en trait continu correspondent aux mailles de calculs, les autres aux mailles où on ne résout pas les équations de Navier-Stokes. L'étude paramétrique a été menée pour deux épaisseurs de bourrelet différentes (trait continu – pointillés).

correspondent aux ondes capillaires observées lors de l'effondrement.

Si l'on compare cette vitesse à la même mesure pour une bulle de rayon $R/R_\nu = 8640$ (Fig. 3.8), on constate que la vitesse maximale obtenue est bien plus grande que dans le cas précédent et que le train d'ondes capillaires est nettement atténué.

Il est donc naturel de penser que la variation du nombre de Ohnesorge influence la création d'ondes capillaires par la rétraction du bourrelet. Il reste à vérifier ou infirmer la validité des lois d'échelles prédites grâce à la théorie potentielle. Pour ce faire, l'étude paramétrique a été réalisée sur une très large gamme de nombres de Ohnesorge : $10^{-6} < Oh < 10^{-2}$. Le rayon correspondant à 10^{-2} , pour de l'eau, est égal à $1.4 \mu m$, valeur cent fois supérieure à la longueur capillo-visqueuse. On s'attend donc, à première vue, à ce que les résultats de l'étude paramétrique soient cohérents avec les lois d'échelles pour toute la gamme de nombres de Ohnesorge choisie.

Sur la figure 3.9 sont représentées la vitesse sans dimension du jet lorsqu'il atteint la hauteur de liquide à l'infini, pour deux épaisseurs de bourrelets différentes (Cf. Fig. 3.6), ainsi qu'une droite représentative de la loi d'échelle en $(R/R_\nu)^{-1/2}$.

Le premier constat intéressant que l'on peut faire sur cette série de calculs

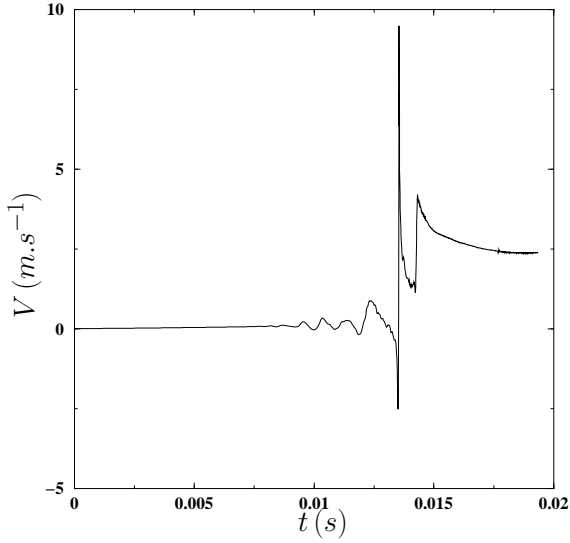


FIG. 3.7.: Vitesse du point se trouvant sur l'axe de symétrie en fonction du temps et pour un rayon adimensionné égal à $R/R_v = 2.88 \cdot 10^5$. Les premières oscillations correspondent aux ondes capillaires convergeant à la base de la cavité.

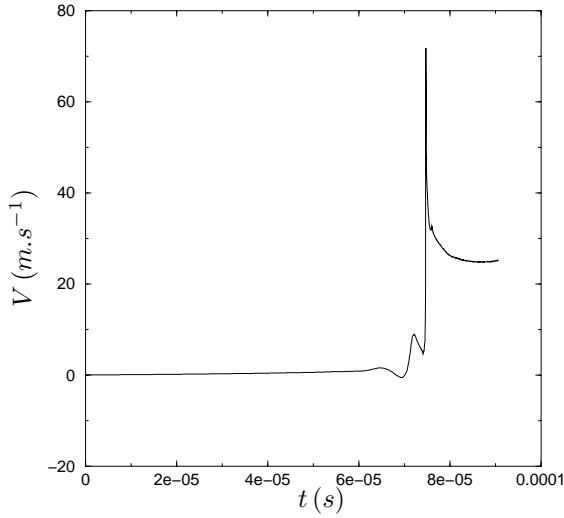


FIG. 3.8.: Vitesse du point se trouvant sur l'axe de symétrie en fonction du temps et pour un rayon adimensionné égal à $R/R_v = 8640$. On constate qu'il y a beaucoup moins d'ondes capillaires que pour $R/R_v = 2.88 \cdot 10^5$.

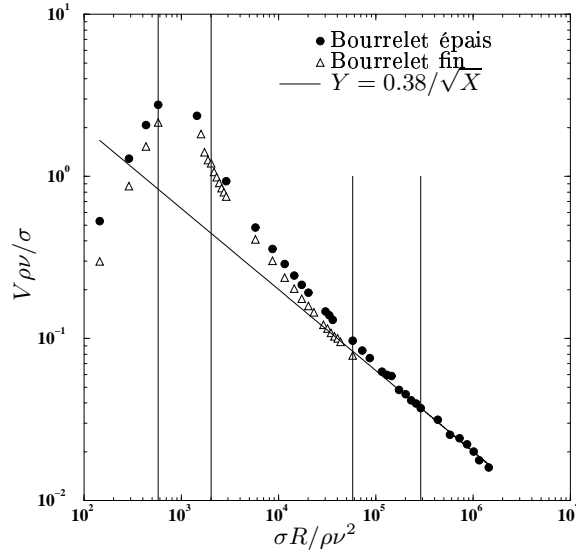


FIG. 3.9.: Vitesse du jet sans dimension en fonction du rayon de la bulle initiale, sans dimension également. Les deux régions délimitées par les lignes verticales correspondent aux valeurs du rayon pour lesquelles une bulle peut être emprisonnée à la base de la cavité.

est le fait que la loi potentielle est respectée pour les grands rayons. En effet, pour les rayons de bulles supérieurs à 60 000 fois la longueur capillo-visqueuse, on remarque que la droite en $R^{-1/2}$ est une bonne approximation des résultats.

En outre, pour les petits rayons ($R < 300R_\nu$), le comportement de la vitesse n'est pas en accord avec la prédiction potentielle : la pente des résultats numériques est positive. Pour $R/R_\nu = 144$, du jet obtenu ne se détache aucune goutte (Cf. Fig. 3.10). On peut attribuer ce comportement à l'action de la vorticité, même si le rayon de la bulle est deux ordres de grandeurs au-dessus de la longueur capillo-visqueuse. Le rayon de la bulle, en effet, n'est peut-être pas la longueur la plus appropriée pour caractériser l'influence de la viscosité. On peut très bien imaginer que la dissipation visqueuse à une échelle cent fois plus petite que la bulle ait une influence sur la globalité du phénomène.

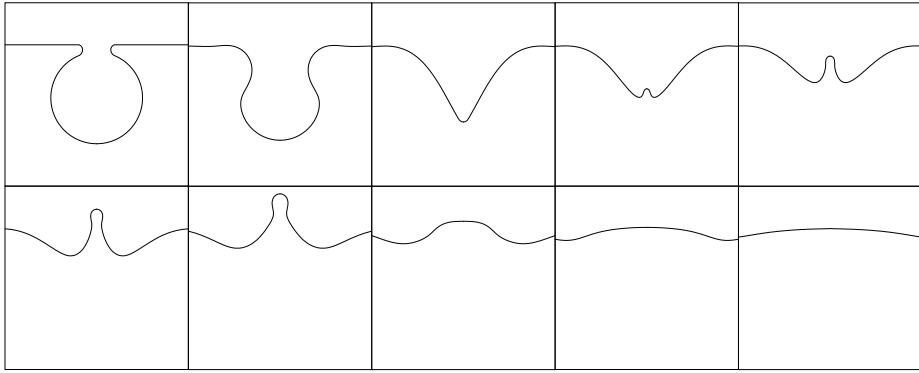


FIG. 3.10.: *Profs successifs de la surface libre pour $R/R_\nu = 144$. La viscosité joue un rôle important : aucune goutte ne se détache du jet et celui-ci retombe.*

Il existe une large gamme de rayons pour laquelle on observe un comportement sinon singulier, du moins particulier, de la vitesse du jet ($300 < R/R_\nu < 40\,000$). La partie de la courbe qui ne comporte pas de résultats ($576 < R/R_\nu < 1440$) correspond à une région pour laquelle le jet trop fin ne nous a pas permis de calculer la vitesse au niveau du liquide à l'infini (Cf. Fig 3.11).

Dans cette région, le phénomène ne suit donc plus la loi auto-similaire prévue par la théorie potentielle, tant au niveau de la vitesse du jet que de sa forme.

Une autre quantité qui présente un intérêt est le rayon de la première goutte émise lorsque le jet se casse. Des résultats expérimentaux montrent que ce rayon est approximativement un dixième du rayon de la bulle initiale. Ceci confirme l'idée selon laquelle, pour les grands rayons, il n'existe pour ce problème qu'une seule échelle de longueur, à savoir le rayon de la bulle. De même que pour la vitesse, sur la figure 3.12 est représenté le rayon de la goutte émise pour deux épaisseurs de bourrelets différentes, par rapport au rayon de la bulle.

On remarque également que le rayon de la première goutte émise est à peu

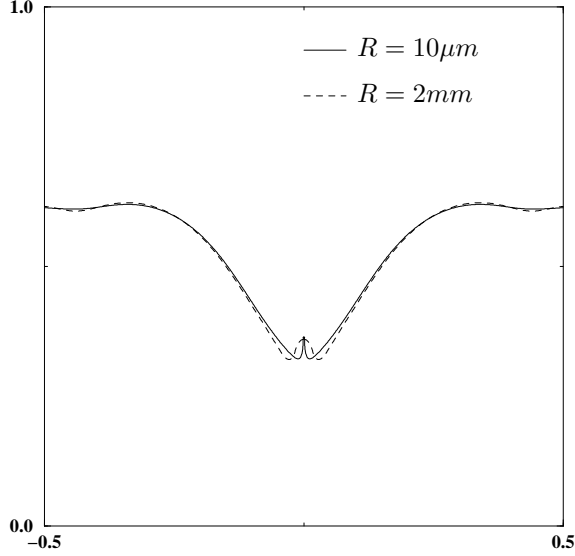


FIG. 3.11.: *Naissance du jet pour deux rayons différents. Pour le grand rayon (pointillés, $R/R_\nu = 144000$), le jet est épais et bien résolu ; pour le petit rayon (trait continu, $R/R_\nu = 720$), le jet est extrêmement fin.*

près un pourcentage constant du rayon de la bulle pour les grands rayons. On trouve $R_d/R \simeq 0.13$, valeur en accord avec les résultats expérimentaux. Il existe également une région pour laquelle le rayon de la goutte émise est beaucoup plus petit que cette valeur. Cette région correspond à celle pour laquelle le comportement de la vitesse est inattendu.

La vitesse du jet et le rayon de la goutte émise échappent donc aux lois d'échelles prédites par la théorie potentielle, pour une large gamme de rayons. Une autre grandeur suit également un comportement singulier dans cette région : la pression maximale sur l'axe de symétrie. La figure 3.13 représente cette pression maximale, sans dimension, en fonction de R/R_ν . La droite en trait continu représente la loi d'échelle en R^{-1} .

Il existe également une différence notable entre le phénomène observé dans la zone singulière de la courbe de vitesse et la partie droite de cette courbe : la quantité d'ondes capillaires varie fortement de la droite de la courbe vers la gauche. Pour des petits nombres de Ohnesorge ($R/R_\nu = 144000$ par exemple), un grand nombre d'ondes capillaires de différentes longueurs d'ondes converge à la base de la cavité, tandis que pour $R/R_\nu = 720$, on n'en observe qu'une seule, à savoir le mouvement d'ensemble d'effondrement de la cavité (Cf. Figs. 3.14 et 3.15).

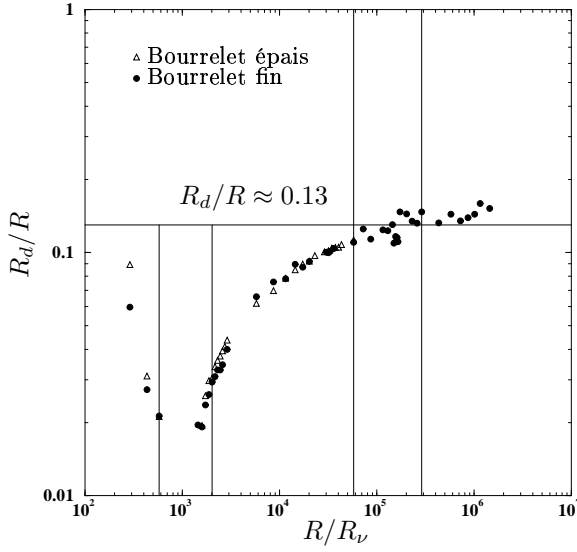


FIG. 3.12.: Rapport entre le rayon de la première goutte émise et le rayon de la bulle initiale, en fonction de R/R_ν .

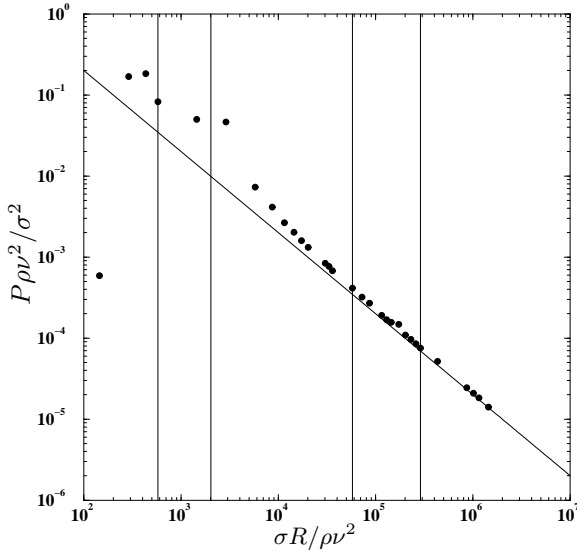


FIG. 3.13.: Pression maximale sur l'axe de symétrie lorsque le jet atteint le niveau d'eau à l'infini.

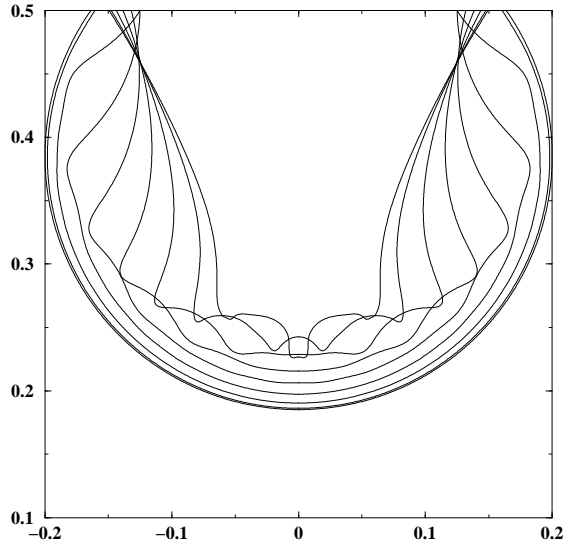


FIG. 3.14.: Ondes capillaires convergeant à la base de la cavité pour $R/R_\nu = 144000$.

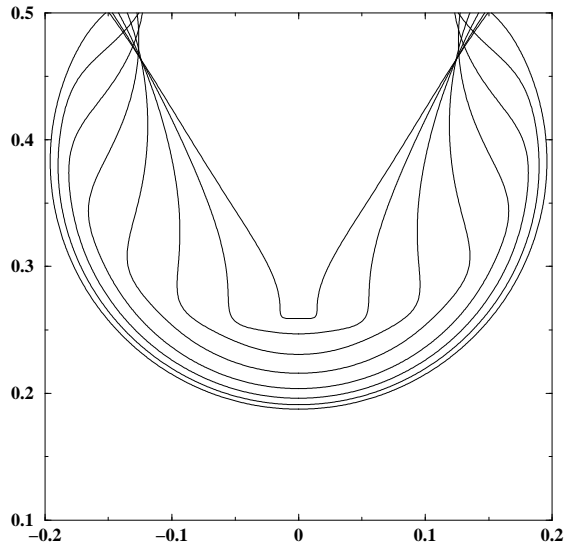


FIG. 3.15.: Profils successifs pour $R/R_\nu = 720$.

3.4. Théorie auto-similaire

Nous nous sommes intéressés à la région pour laquelle l'épaisseur du jet (trop fin) ne nous permettait pas de mener le calcul jusqu'au bout. De telles caractéristiques de cette région, comme la naissance d'un jet très fin, on déjà été observées expérimentalement [55] avec des ondes de Faraday axi-symétriques. Dans le cadre de cette étude, un récipient cylindrique est soumis à des oscillations verticales. Pour certaines valeurs de la fréquence et de l'amplitude des oscillations, les auteurs observent la naissance d'un jet très fin et très rapide (Cf. Fig. 0.7). Ce jet est observé au seuil d'une transition topologique de l'interface : en-dessous de ce seuil, une bulle est capturée au centre du récipient, au-dessus la surface reste connectée. Les auteurs mettent en évidence la présence d'une singularité de courbure en temps fini avant la formation du jet à l'approche de ce seuil. Il est montré que l'évolution temporelle de l'interface obéit à des lois auto-similaires déduites de l'étude de l'équation de Bernoulli, c'est-à-dire dans le cadre d'un écoulement potentiel.

Dans notre étude, la présence d'un comportement anormal de la vitesse du jet nous a incités à chercher des solutions auto-similaires de l'écoulement avant la formation du jet. La figure 3.16 représente les profils successifs avant la formation du jet pour $R/R_\nu = 720$.

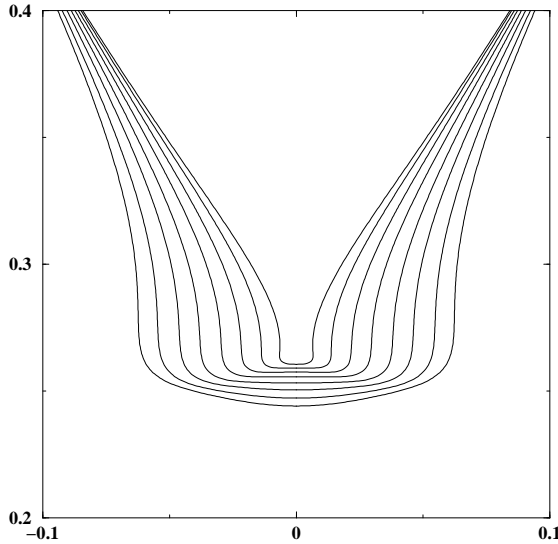


FIG. 3.16.: *Profils successifs de la surface libre pour $R/R_\nu = 720$ à proximité de la zone d'apparition du jet.*

Etant donnée la ressemblance des profils successifs, on peut, en effet, s'attendre à ce que la surface suive une loi auto-similaire au cours du temps, à

l'approche de la formation du jet.

La théorie de l'auto-similarité [2] a été développée originellement par Barenblatt et largement utilisée par la suite, notamment pour l'étude du pincement de Rayleigh-Plateau [12], ou en encore pour celle de la formation de jets hyperboliques à une interface [26].

Dans le cadre de notre étude, nous avons tout d'abord postulé l'existence d'une telle singularité de courbure en temps fini pour les raisons précédemment évoquées, à savoir les difficultés de calcul rencontrées, le comportement anormal de la vitesse du jet et la finesse de celui-ci. Partant de ce postulat, on constate que les dimensions du problème atteignent, à l'approche de cette singularité, des dimensions arbitrairement petites et donc parfaitement indépendantes des conditions extérieures ou initiales comme le rayon de la bulle. Cela signifie exactement qu'il n'existe plus de nombre sans dimension caractérisant l'écoulement, puisque le nombre de Ohnesorge est construit à l'aide du rayon de la bulle. En d'autres termes, à l'approche de la singularité, l'écoulement, localement en temps et en espace, revêt un caractère universel. La seule longueur du problème est alors la longueur capillo-visqueuse $\rho\nu^2/\sigma$, longueur à laquelle il faut comparer les dimensions d'espace du problème : les coordonnées radiale et longitudinale par rapport à la position de la singularité.

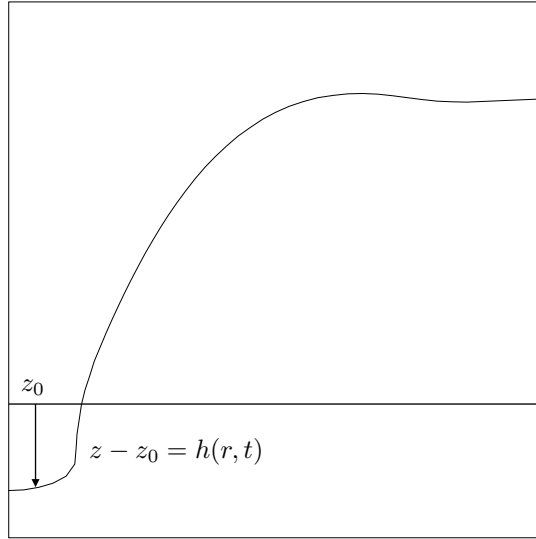


FIG. 3.17.: Représentation de la surface libre à l'approche de la singularité. z_0 est l'élévation de la surface libre à l'instant de la singularité.

Appelons t_0 l'instant de la singularité, et z_0 l'ordonnée de la singularité. Le phénomène à l'approche de la singularité peut donc être décrit en fonction de nouvelles variables représentant la distance à cette singularité, en espace et en

3. Eclatement d'une bulle à la surface d'un liquide

temps : r , $z - z_0$ et $t_0 - t$. Etant donné que ces trois variables tendent vers zéro à l'approche de la singularité, nous allons faire l'hypothèse que les échelles d'espace locales se comportent comme des puissances de $t_0 - t$:

$$l_r \sim (t_0 - t)^\alpha \quad l_z \sim (t_0 - t)^\beta$$

Etant donnée l'absence d'échelle de longueur extérieure, nous allons supposer que le phénomène, à l'approche de la singularité, est auto-similaire, c'est-à-dire qu'il se reproduit continûment au cours du temps, à différentes échelles. La question à laquelle nous devons répondre est la suivante : existe-t-il des solutions auto-similaires du problème ? Introduisons deux nouvelles variables auto-similaires décrivant le nouvel espace dans lequel on cherche à résoudre le problème :

$$\zeta = \frac{r}{l_r} \quad \eta = \frac{z - z_0}{l_z}$$

Dans l'espace décrit par les variables ζ et η , si l'on suppose que l'élévation de la surface est une fonction de la distance à l'axe $z - z_0 = h(r, t)$ (Cf. Fig.3.17), on a alors :

$$h(r, t) = l_z f(\zeta)$$

En outre, nous allons supposer que l'écoulement reste potentiel, ce qu'il faudra vérifier par la suite. Ceci revient à faire l'hypothèse qu'il existe un potentiel des vitesses φ tel que $\mathbf{u} = \nabla \varphi$. Postulons également que ce potentiel se comporte comme une puissance de $t_0 - t$ au voisinage de la singularité :

$$\varphi(r, z, t) \sim (t_0 - t)^\gamma$$

Dans le nouvel espace, le potentiel $g = \varphi / (t_0 - t)^\gamma$ est une fonction de ζ et η , donc :

$$\varphi(r, z, t) = (t_0 - t)^\gamma g(\zeta, \eta)$$

Les valeurs des exposants α , β et γ sont déduites de l'étude de l'équation de Bernoulli à la surface libre :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\partial_r h}{r \sqrt{1 + (\partial_r h)^2}} + \frac{\partial_{rr} h}{(1 + (\partial_r h)^2)^{3/2}} \quad (3.9)$$

où l'effet de la gravité a été négligé et où les dimensions ont été supprimées en utilisant comme vitesse de référence $\sqrt{\sigma / \rho L}$ (L étant une longueur).

Si l'on remplace, dans cette équation, $\varphi(r, z, t)$ par $(t_0 - t)^\gamma g(\zeta, \eta)$, r par $(t_0 - t)^\alpha \zeta$ et $h(r, t)$ par $(t_0 - t)^\beta f(\zeta)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= (t_0 - t)^{\gamma-1} (-\gamma g(\zeta, \eta) + \alpha \zeta \partial_\zeta g + \beta \eta \partial_\eta g) \\ -\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 &= -\frac{1}{2} \left((t_0 - t)^{2(\gamma-\alpha)} (\partial_\zeta g)^2 + (t_0 - t)^{2(\gamma-\beta)} (\partial_\eta g)^2 \right) \\ \frac{\partial_r h}{r \sqrt{1 + (\partial_r h)^2}} &= \frac{(t_0 - t)^{\beta-2\alpha}}{\zeta (1 + (t_0 - t)^{2(\beta-\alpha)} (f'(\zeta)^2)^{1/2})} \\ \frac{\partial_{rr} h}{(1 + (\partial_r h)^2)^{3/2}} &= \frac{(t_0 - t)^{\beta-2\alpha}}{(1 + (t_0 - t)^{2(\beta-\alpha)} (f'(\zeta)^2)^{3/2})} \end{aligned}$$

Pour que toutes les contraintes aient la même importance à l'approche de la singularité, les exposants de $t_0 - t$ des différents termes doivent être égaux. Cet équilibre des forces impose les valeurs de α , β et γ :

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad \beta = \frac{2}{3} \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

On peut maintenant écrire la conservation de la masse, ainsi que les conditions cinématique et dynamique à la surface dans l'espace des variables auto-similaires. On obtient :

$$\Delta g = 0 \quad (3.10)$$

$$-\frac{2}{3}f + \frac{2}{3}\zeta f' + f' \frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{\partial g}{\partial \eta} \quad \text{en } \eta = f(\zeta) \quad (3.11)$$

$$-\frac{1}{3}g + \frac{2}{3}\zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{2}{3}\eta \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{1}{2}(\nabla g)^2 - \kappa = 0 \quad \text{en } \eta = f(\zeta) \quad (3.12)$$

où on a :

$$(\nabla g)^2 = \left(\frac{\partial g(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.13)$$

$$\kappa = \frac{f'(\zeta)}{\zeta \sqrt{1 + f'^2(\zeta)}} + \frac{f''(\zeta)}{(1 + f'^2(\zeta))^{3/2}} \quad (3.14)$$

La résolution numérique de ce système d'équations conduirait à la détermination du profil de la surface libre et du potentiel des vitesses aux instants proches de la singularité.

Forme asymptotique de la surface

On peut déduire de ces équations plusieurs conclusions sur la forme de l'interface et sur le champ de vitesse loin de la singularité ($\zeta \gg 1$). L'égalité de α et β confère au profil de la surface une forme conique loin de la singularité.

Soit r_1 un rayon fixé non nul. Alors, pour tout ζ , il existe un instant t tel que :

$$\zeta = r_1(t_0 - t)^{-2/3}$$

De plus, on a :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta} = \frac{h(r_1, t)}{r_1}$$

Supposons que $h(r_1, t)$ possède une limite finie quand t tend vers t_0 . Alors $f(\zeta)/\zeta$ en possède une également lorsque ζ tend vers l'infini. Appelons θ_∞ cette limite. Ayant choisi r_1 quelconque, on a bien :

$$\text{pour } r \text{ quelconque} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(r, t)}{r} = \theta_\infty$$

Donc la forme de la surface loin de la singularité est un cône et l'on a :

$$f(\zeta) \sim_{\infty} \theta_{\infty} \zeta$$

De cette égalité de α et β on peut aussi conclure que la surface libre se contracte de la même manière (proportionnellement) suivant ses coordonnées radiale et longitudinale.

Comportement asymptotique du potentiel des vitesses

On peut également tirer des conclusions sur le comportement asymptotique du potentiel des vitesses g . Une fonction harmonique, comme g , peut s'écrire, en coordonnées cylindriques, sous la forme d'une série dont le terme générique est :

$$g(R, \Theta) = R^{\delta} P_{\delta}(\cos \Theta)$$

où R est la distance du point considéré au centre du repère et Θ la colatitude, dans le plan des variables auto-similaires. On peut aussi l'écrire en fonction des variables auto-similaires :

$$g(\zeta, \eta) = (\zeta^2 + \eta^2)^{\delta/2} P_{\delta} \left(\frac{\eta}{(\zeta^2 + \eta^2)^{1/2}} \right)$$

Les dérivées premières de g en fonction de ζ et η sont :

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \delta \zeta (\zeta^2 + \eta^2)^{\delta/2-1} P_{\delta} - (\zeta^2 + \eta^2)^{\delta/2} \frac{\zeta \eta}{(\zeta^2 + \eta^2)^{3/2}} P'_{\delta}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \delta \eta (\zeta^2 + \eta^2)^{\delta/2-1} P_{\delta} + (\zeta^2 + \eta^2)^{\delta/2} \left(\frac{1}{(\zeta^2 + \eta^2)^{1/2}} - \frac{\zeta \eta}{(\zeta^2 + \eta^2)^{3/2}} \right) P'_{\delta}$$

Sachant que $\eta \sim \theta_{\infty} \zeta$, les différents termes de $\partial g / \partial \zeta$ et $\partial g / \partial \eta$ sont équivalents à $\zeta^{\delta-1}$; et les trois premiers termes de l'équation 3.12 sont équivalents à ζ^{δ} . Or, on montre facilement que le terme de tension de surface est équivalent à ζ^{-1} .

Lors de la détermination des exposants d'auto-similarité α , β et γ , nous avons supposé que la tension de surface était équilibrée partout. Si l'on veut rester cohérent avec cette hypothèse, on doit assurer cet équilibre avec un des autres termes de l'équation 3.12. On doit donc vérifier l'une ou l'autre des égalités suivantes :

$$2\delta - 2 = -1 \quad \delta = -1$$

La puissance la plus grande possible pour le développement en série de g est donc :

$$\delta = \frac{1}{2}$$

Néanmoins, si l'on choisit $\delta = 1/2$ comme plus grande puissance du développement en série de g , on constate, que si la tension de surface – évoluant en

ζ^{-1} – est effectivement équilibrée par le terme d'énergie cinétique, les termes dominants restent les trois premiers termes de l'équation de Bernoulli puisqu'ils se comportent comme $\zeta^{1/2}$. Heureusement, pour $f(\zeta) = \alpha\zeta$, ces trois premiers termes s'annulent rigoureusement, car on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}g + \frac{2}{3}\zeta\frac{\partial g}{\partial\zeta} + \frac{2}{3}\eta\frac{\partial g}{\partial\eta} &= -\frac{1}{3}g + \frac{2}{3}R\frac{\partial g}{\partial R} \\ &= -\frac{1}{3}g + \frac{2}{3}\frac{1}{2}R^{1/2}P_{1/2}(\cos\Theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A l'infini, le terme de tension de surface est donc bien compensé par le terme d'énergie cinétique.

Si l'on supposait que les trois premiers termes de l'équation 3.12 sont équilibrés avec le quatrième (représentatif de la densité d'énergie cinétique), on obtiendrait :

$$2\delta - 2 = \delta$$

à savoir $\delta = 2$, la solution de Longuet-Higgins dans laquelle la tension de surface n'est prise en compte qu'à proximité de la singularité.

Dans le cadre de nos hypothèses, le potentiel des vitesses et le champ de vitesses auto-similaires sont donc équivalents respectivement à $\delta^{1/2}$ et $\delta^{-1/2}$:

$$g \sim \zeta^{1/2} \quad \frac{\partial g}{\partial\zeta} \sim \frac{\partial g}{\partial\eta} \sim \zeta^{-1/2}$$

Notons que la solution obtenue par Longuet-Higgins et Oguz [28] dans l'étude de la formation d'un jet dans les bulles de cavitation, à savoir $\delta = 1/4$, ne permet pas d'équilibrer la tension de surface.

3.5. Retour sur l'étude paramétrique

Comme nous l'avait montré la figure 3.16, les profils successifs, pour $R/R_\nu = 720$ présentent une certaine ressemblance qui laisse penser que l'écoulement obéit à une loi auto-similaire. La façon la plus simple de vérifier cela est de remettre à l'échelle ces profils par rapport aux longueurs caractéristiques précédemment écrites, à savoir $l_r = l_z = (t_0 - t)^{2/3}$. Le problème principal est que l'on ne connaît pas, *a priori*, l'instant de la singularité t_0 . Il a donc fallu trouver une approximation de ce temps ; puis les coordonnées des points de la surface ont été redimensionnées par rapport à l_r et l_z . La figure 3.18 représente, à gauche les profils successifs de la surface libre, à l'approche de la singularité, à droite les profils remis à l'échelle. On obtient effectivement, en première approximation, un profil unique, ce qui confirme la théorie auto-similaire, et donc la présence d'une singularité.

Il reste, pour valider cette théorie, à comparer les échelles de longueur du problème aux instants où on l'étudie, à la longueur capillo-visqueuse $l_\nu = \rho\nu^2/\sigma$.

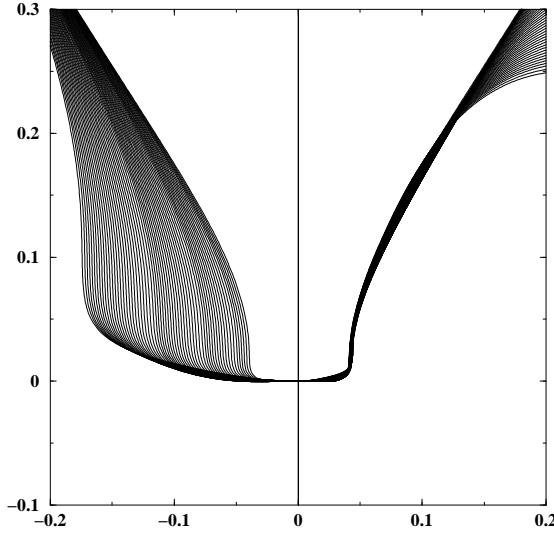


FIG. 3.18.: *Profils successifs pour $R/R_\nu = 720$: à gauche, profils réels, ajustés verticalement de manière à ce que le point sur l'axe de symétrie ait une ordonnée nulle ; à droite, profils redimensionnés par rapport à $(t_0 - t)^{2/3}$.*

Rappelons le raisonnement qui nous a conduit à cette étude basée sur l'hypothèse que l'écoulement est potentiel au voisinage de la singularité. Nous avons observé, pour une gamme de valeurs du nombre de Ohnesorge, un comportement singulier de la vitesse du jet. Pour certaines valeurs de ce nombre, nous n'avons pas pu poursuivre le calcul étant donnée l'épaisseur très faible du jet. Il s'est avéré que la vorticité se détache du jet et que, par conséquent, il est difficile de supposer l'écoulement potentiel. Une théorie auto-similaire nous a permis de mettre en évidence une singularité de courbure de la surface libre en écoulement potentiel. Il est donc important de vérifier que les échelles de longueurs atteintes par la structure de la cavité sont bien plus grandes que la longueur l_ν . C'est, en effet, le cas, puisque le dernier profil est d'une taille de l'ordre du micron, c'est-à-dire de deux ordres de grandeurs supérieur à l_ν . La vorticité joue donc un rôle, via le nombre de Ohnesorge, mais n'intervient pas dans le développement de la singularité.

Angle du cône à l'instant de la singularité

Bien que les profils successifs remis à l'échelle se superposent, il persiste une différence notable avec les résultats de Zeff et *al.* : la valeur de l'angle du cône à l'instant de la singularité. Les auteurs obtiennent numériquement un angle de

120° ¹, tandis que l'angle que nous observons à l'approche de la singularité est égal à 73° . En revanche, cet angle est en accord avec le résultat expérimental de 68° de MacIntyre [30] (Cf. Fig. 3.1). D'autres observations théoriques sur la valeur de cet angle, dans un contexte différent, ont été effectuées par Longuet-Higgins [27]. L'auteur analyse les résultats obtenus par Oguz et Prosperetti [34] sur l'impact d'une goutte sur une surface liquide. Un écoulement conique est également observé pour une certaine gamme de paramètres. Longuet-Higgins dissocie deux régimes différents : l'un lorsque l'angle du cône est inférieur à 109.5° , l'autre lorsqu'il est supérieur. Il prédit également une singularité pour cet angle de 109.5° .

3.6. Emprisonnement d'une bulle

Les problèmes rencontrés lors du calcul de la vitesse du jet (jet trop fin) ne sont pas les seuls à être survenus. Dans la partie droite de la courbe de vitesses, certains calculs n'ont pas pu être effectués. Comme le montre la figure 3.19, pour certaines valeurs du nombre de Ohnesorge, une partie des marqueurs proches de l'axe de symétrie est écrasée sur ce dernier et le calcul n'a plus de réalité physique. On peut corréler ce phénomène à l'emprisonnement d'une bulle à la base de la cavité. Cette singularité correspond au phénomène inverse du pincement de Rayleigh-Plateau, c'est-à-dire en intervertissant le fluide dynamiquement actif et le fluide dynamiquement inactif.

Pour s'assurer qu'il s'agissait bien d'un phénomène physique et non d'artefacts numériques, nous avons doublé la résolution (1024^2 au lieu de 512^2). La figure 3.20 représente le stade ultime de l'emprisonnement d'une bulle, pour un rayon de bulle initiale égal à $10^5 R_\nu$. Il apparaît donc clairement que les ondes capillaires convergeant à la base de la cavité peuvent, dans certaines conditions piéger une bulle. La variation du nombre de Ohnesorge, à proximité de ces régimes, a pour effet de changer la phase des ondes capillaires.

Dans l'article de Zeff et *al.* [55], l'apparition d'une singularité de courbure coïncide avec un changement topologique de la surface, comme l'emprisonnement d'une bulle. On peut donc s'interroger sur la corrélation, dans notre cas, entre ce changement topologique et la singularité principale. Il semble, en effet, que pour $R/R_\nu = 720$, la surface libre subisse ce changement topologique (Cf. Fig. 3.21). Néanmoins, la résolution numérique ne nous permet pas de l'affirmer.

Si l'on suit ce raisonnement, l'emprisonnement d'une bulle dans une autre région de paramètres doit coïncider avec une singularité de même type que la singularité principale. Nous avons isolé un cas limite ($R/R_\nu = 57600$) correspondant au seuil décrit dans l'article de Zeff et *al.* La figure 3.22 représente les profils successifs de la surface libre, pour $R/R_\nu = 57600$. Ce seuil correspond également à une bulle emprisonnée de volume nul.

¹L'obtention de cet angle de 120° n'est pas claire et semble être une hypothèse plus qu'un résultat de calcul

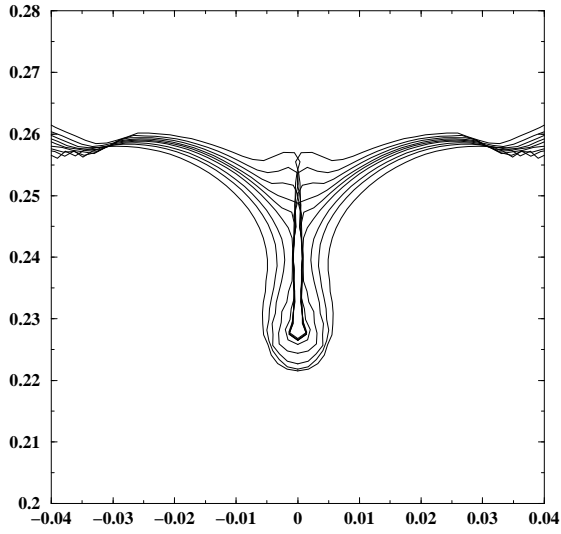


FIG. 3.19.: Problème d'écrasement de la chaîne de marqueurs pour $R/R_\nu = 100800$

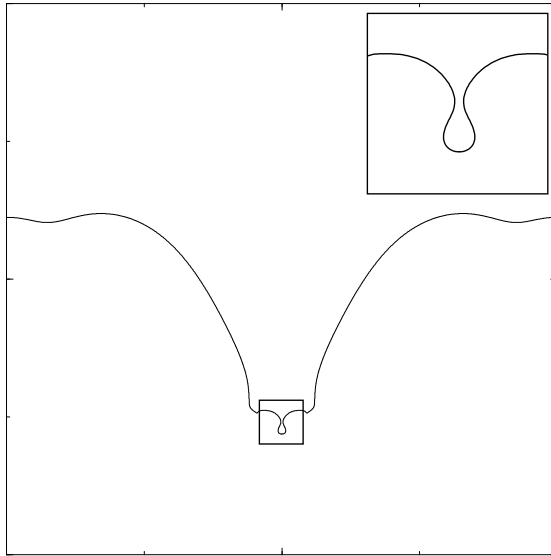


FIG. 3.20.: Emprisonnement probable d'une bulle à la base de la cavité pour $R/R_\nu = 10^5$

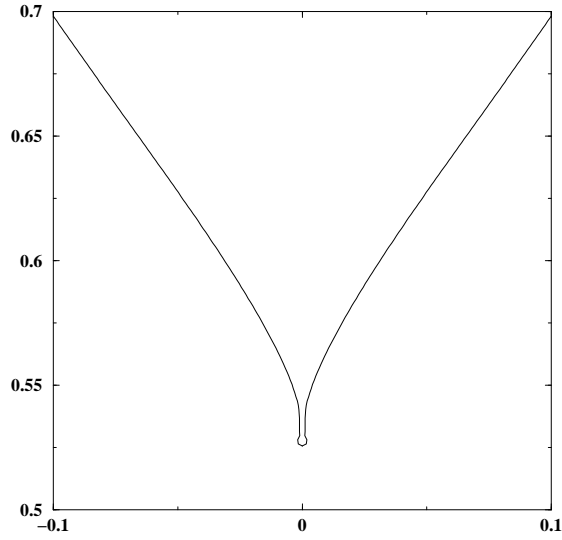


FIG. 3.21.: *Emprisonnement probable d'une bulle à la base de la cavité pour $R/R_\nu = 720$*

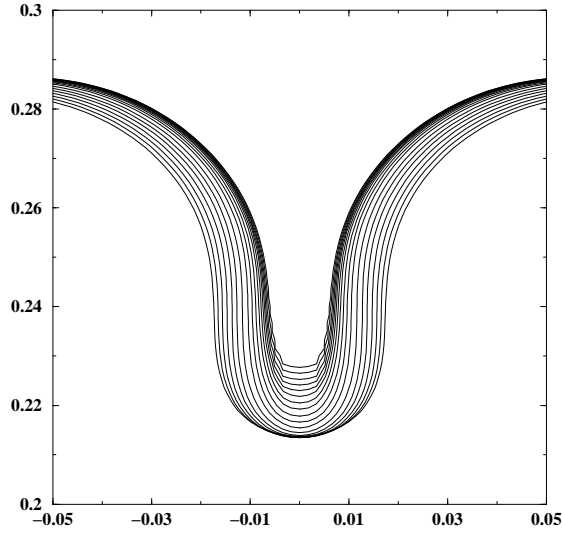


FIG. 3.22.: *Profils successifs de la surface libre pour $R/R_\nu = 57600$. Le pas de temps n'est pas constant. Etant donnée la ressemblance des profils, on peut penser être en présence d'une singularité de courbure. Nous n'avons pas réussi à déterminer les lois d'échelles représentatives de cette singularité.*

La ressemblance des profils peut faire penser à l'existence d'une solution auto-similaire. Si elle existe, cette singularité est fondamentalement différente de la singularité principale : on ne retrouve pas la forme conique décrite dans la section précédente et aucun jet n'est formé. Deux hypothèses peuvent être formulées quant à cette région d'emprisonnement de bulle :

- Soit la résolution numérique ne nous permet pas de résoudre un jet similaire au jet observé pour la singularité principale,
- Soit le seuil de transition topologique ne correspond pas, dans notre cas, au type de singularité associé à la formation du jet fin et à la cavité conique.

3.7. Etude avec des formes de bulles réalistes en présence de gravité

L'étude du premier chapitre de cette partie nous a permis d'initialiser un certain nombre de simulations avec des formes de bulles plus réalistes. Ayant pris en compte l'effet de la gravité dans le calcul statique, il nous a semblé naturel de la prendre en compte également dans le calcul des équations de Navier-Stokes. Deux nombres sans dimension interviennent alors dans la formulation du problème : le nombre de Ohnesorge, comme précédemment, et le nombre de Bond.

$$Oh = \rho\nu^2/\sigma R \quad (3.15)$$

$$Bo = \rho g R^2/\sigma \quad (3.16)$$

A ces deux nombres sont associées deux longueurs caractéristiques : $R_\nu = \rho\nu^2/\sigma$ et $R_g = \sqrt{\sigma/\rho g}$. Pour de l'eau, elle sont respectivement égales à $0.014 \mu m$ et $2.7 mm$. Ceci laisse penser que pour des bulles nettement plus petites que $2.7 mm$, la gravité ne doit intervenir ni dans le calcul de la forme statique, ni dans la résolution des équations de Navier-Stokes. L'étude des formes statiques a montré que c'était bien le cas : pour des bulles de rayon nettement inférieur à $1 mm$, la forme de la cavité est quasiment sphérique. Néanmoins, les simulations numériques apportent des conclusions différentes. La figure 3.23 représente les conditions initiales et les profils en fin de calcul (lorsque le jet arrive au niveau d'eau à l'infini) pour $R_{eq} = 0.07, 0.12, 0.21, 0.38, 0.67, 1.17, 1.98, 3.13 mm$, où R_{eq} est le rayon équivalent de la bulle.

Pour $R_{eq} < 0.38 mm$, le phénomène semble être identique, ce qui tend à prouver que ni R_ν , ni R_g n'interviennent et donc que le phénomène est, comme dans l'étude paramétrique précédente, auto-similaire. On devrait donc s'attendre à observer un comportement de la vitesse du jet en $R^{-1/2}$. Ce n'est, en fait, pas le cas, comme le montre la figure 3.24, pour laquelle la pente est environ de -0.8 .

Ces résultats indiquent qu'on ne peut plus considérer le rayon équivalent comme la seule longueur du problème. La gravité intervient dans le phénomène, directement (dans le calcul des équations de Navier-Stokes) ou indirectement (dans le calcul de la forme statique). La vitesse, dans cette région de la courbe,

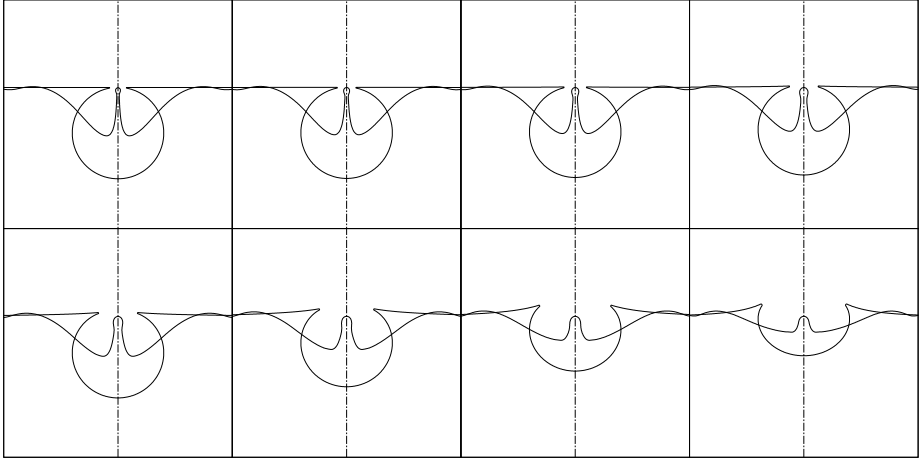


FIG. 3.23.: De gauche à droite et de haut en bas : calculs de l'éclatement de la bulle, en prenant en compte la gravité et pour $R_{eq} = 0.07, 0.12, 0.21, 0.38, 0.67, 1.17, 1.98, 3.13 \text{ mm}$.

doit donc s'exprimer de la manière suivante :

$$V \frac{\rho \nu}{\sigma} = \left(\frac{R_{eq}}{R_\nu} \right)^{-1/2} f \left(\frac{R_{eq}}{R_g} \right) \quad (3.17)$$

De même que pour l'étude sans gravité, on constate que la viscosité joue un rôle important pour les résultats de la partie gauche de la courbe, puisque la vitesse sans dimension décroît à l'approche de $R_{eq}/R_\nu = 100$. La partie droite de la série de résultats présente de fortes discontinuités. L'évolution de la surface libre pour un rayon équivalent $R_{eq}/R_\nu = 837952$ est représentée sur la figure 3.25. Cette simulation correspond au pic de vitesse obtenu dans la partie droite de la courbe. La figure 3.26 représente l'évolution de la surface libre avant la formation du jet, pour une bulle de rayon équivalent $R_{eq}/R_\nu = 837952$, soit de 1.16 cm pour de l'eau.

Les profils successifs de la surface ressemblent au seuil d'emprisonnement d'une bulle examiné lors de l'étude sans pesanteur. Néanmoins, une différence notable existe : on observe, dans ce cas, la naissance d'un jet très rapide. Ce jet est probablement à attribuer à la prise en compte de la gravité.

Singularité principale

La pente des résultats de la vitesse augmente sensiblement pour $R_{eq}/R_\nu \simeq 2000$, ce qui peut laisser penser qu'il y ait également une singularité en temps fini, du même type que celle de l'étude paramétrique. Le pic de vitesse est plus

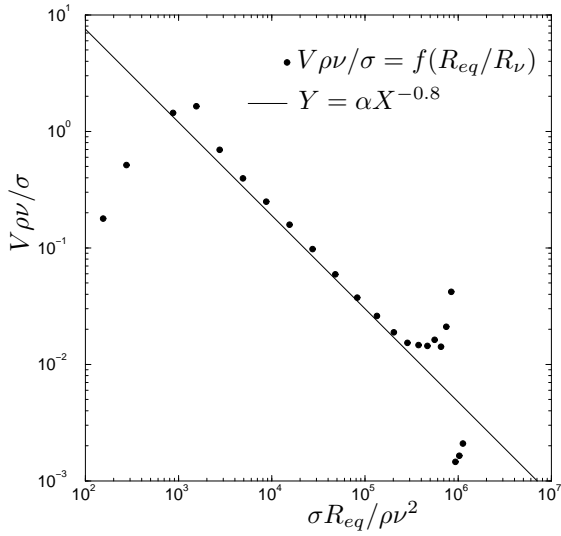


FIG. 3.24.: Vitesse du jet en fonction du rayon équivalent. Les formes initiales utilisées ici sont celles que l'on a obtenues suite à l'étude en statique. La gravité est prise en compte.

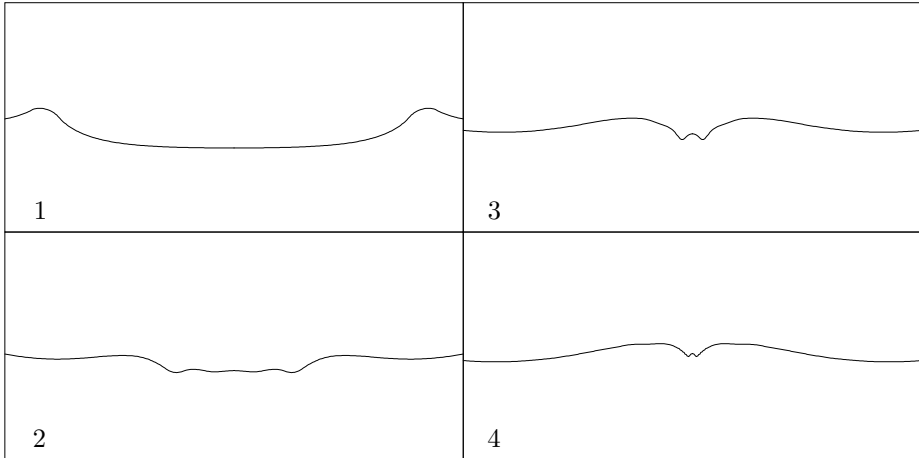


FIG. 3.25.: Evolution de la surface libre pour un rayon équivalent de 1.16 cm

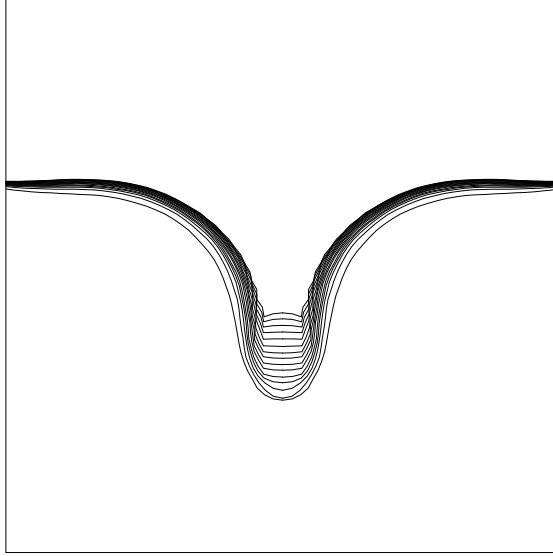


FIG. 3.26.: *Evolution de la surface libre pour un rayon équivalent de 1.16 cm à l'approche de la formation du jet.*

près de la zone pour laquelle la viscosité joue un rôle. Ceci corrobore le fait que la condition initiale influe sur la position de la singularité principale.

Pour les simulations effectuées à proximité du pic de vitesse, on observe effectivement une variation notable de l'épaisseur relative du jet (Cf. Fig. 3.27).

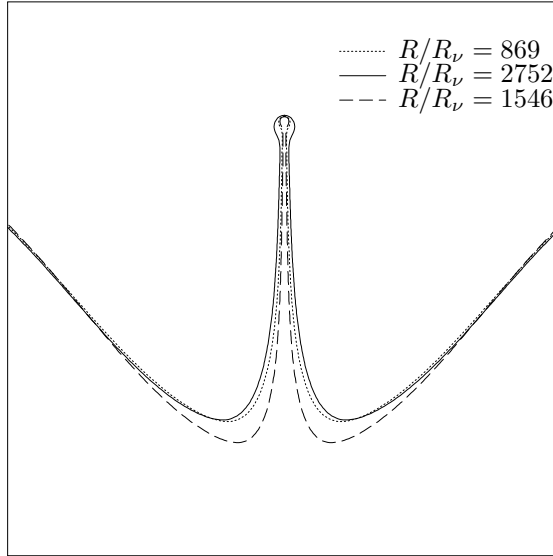


FIG. 3.27.: Jet en fin de calcul pour différents nombres de Ohnesorge. L'épaisseur relative du jet passe par un minimum pour $R/R_v = 1546$. Le maillage utilisé est de 512^2 .

Conclusions

Dans cette partie, différents types d'interactions entre une bulle et une surface libre ont été étudiés. Dans un premier temps, la forme statique de bulles accrochées à une surface libre a été résolue numériquement, puis des lois d'échelles pour les petits et grands rayons ont été prédites. Ces comportements asymptotiques ont été vérifiés par le calcul. Le deuxième chapitre de cette partie a consisté en une étude détaillée de l'éclatement d'une bulle, en négligeant la gravité, puis en la prenant en compte dans un second temps. Deux conclusions principales peuvent être tirées de cette étude :

- Pour une forme donnée de bulle, il existe un nombre de Ohnesorge pour lequel on observe une singularité de courbure en temps fini à la base de la cavité. Cette singularité est bien décrite par une théorie potentielle auto-similaire. Les coordonnées radiale et longitudinale de la surface libre à l'approche de la singularité évoluent comme $(t_0 - t)^{2/3}$, où t_0 est l'instant de la singularité. La forme asymptotique de la cavité est un cône, ce qui est en accord avec la loi d'échelle en $(t_0 - t)^{2/3}$ des coordonnées spatiales. Suite à cette singularité, un jet vertical très fin et très rapide est produit. Une bulle est probablement emprisonnée à la base de la cavité à proximité de cette singularité.
- Pour une large gamme de nombres de Ohnesorge, une petite quantité d'air est emportée sous la surface. La transition topologique de la surface correspondant à cet emprisonnement de bulle n'est pas associé à la même singularité que celle observée par Zeff et *al.*. Aucun jet n'est observé au seuil et la forme asymptotique de la cavité n'est pas un cône.

De nombreuses études restent à faire sur ce sujet. L'angle du cône formé lors de la singularité principale est encore une inconnue du problème. L'angle que nous avons obtenu diffère notablement des résultats numériques ou théoriques de Longuet-Higgins et Zeff. Il serait important de calculer, à l'aide d'une méthode d'intégrales de frontières, la forme auto-similaire de la surface à l'approche de la singularité. Deux méthodes semblent pouvoir donner des résultats sur ce sujet :

- Introduire dans l'équation de Bernoulli auto-similaire, un terme d'accumulation artificiel pour faire converger le potentiel des vitesses et les points de la surface vers la solution auto-similaire. Cette méthode nécessite la connaissance préalable de la valeur de l'angle du cône à l'infini.
- Initialiser un calcul d'écoulement potentiel – avec une méthode intégrale et un raffinement local du maillage – avec un profil et un champ de vitesse obtenus par le code marqueurs à proximité de la singularité.

Bien entendu, une étude approfondie du seuil d'emprisonnement de la bulle s'avère également important. La détermination des exposants d'auto-similarité reste une question ouverte...

Deuxième partie

Ecoulements potentiels

Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude d'écoulements de fluides très peu visqueux. La notion de viscosité pour un fluide, est indissociable des échelles d'espace et de temps sur lesquelles on souhaite regarder le phénomène. Par exemple, l'eau, dont la viscosité dynamique est de $10^{-3} \text{ kg s}^{-2}$, se comporte comme un fluide non visqueux à l'échelle d'une vague déferlante, mais la viscosité peut avoir une influence importante sur l'écoulement à proximité de parois ou d'une surface, à de plus petites échelles. Il est donc très important de quantifier le rôle de la viscosité avant d'envisager l'utilisation de telle méthode numérique ou de telle autre pour l'étude d'un problème.

Pour l'écoulement d'un fluide visqueux, l'équation de conservation du champ de vorticité $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$ s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega$$

où d/dt est la dérivée particulaire, ν la viscosité cinématique.

Cette équation nous renseigne sur le fait que la vorticité ne peut pas se développer dans l'écoulement d'un fluide non visqueux. La vorticité est donc une grandeur qui caractérise l'influence de la viscosité sur l'évolution d'un écoulement.

Une analyse dimensionnelle de l'équation précédente permet de montrer que la longueur caractéristique δ sur laquelle une particule fluide transporte de la vorticité se comporte comme :

$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$

Si l'on connaît le temps caractéristique t_0 du phénomène à observer et si les dimensions du problème sont grandes devant $\sqrt{\nu t_0}$, alors la vorticité se développera peu, relativement aux échelles spatiales du phénomène. Cela signifie également que si l'on peut supposer que l'écoulement présente peu de vorticité à l'instant initial et que la viscosité du fluide est faible, le développement de la vorticité pourra être négligé durant le phénomène.

D'autre part, le saut de vorticité à une interface peut être relié à la géométrie de celle-ci [3] :

$$\Delta \omega = 2\kappa q$$

où $\Delta \omega$ est ici le saut de composante de la vorticité parallèle à la surface et perpendiculaire aux lignes de courant, q le module de la vitesse, et κ la courbure moyenne locale. L'existence d'un champ de vorticité près d'une interface et son

développement aux instants ultérieurs sont donc également conditionnés par la courbure locale.

Les deux arguments précédents sont *a priori* contradictoires puisque l'un permet de négliger la vorticité aux instants courts et l'autre impose de la prendre en compte aux endroits de forte courbure. Il est donc nécessaire de faire un choix sur la validité de l'une ou l'autre des approximations, si l'on a affaire à des courbures locales très grandes.

Dans le cadre de cette étude, nous avons supposé que la viscosité du fluide était nulle et que l'écoulement ne comportait pas de vorticité à l'instant initial. De nombreux problèmes peuvent être étudiés en utilisant cette approximation. Par exemple, l'impact d'une goutte d'eau sur un film liquide présente, aux instants courts, les caractéristiques précédentes [54, 53]. De même, et ce sont les deux phénomènes qui nous intéresseront ici, l'impact d'une goutte sur une surface hydrophobe et la coalescence de deux gouttes de mercure en apesanteur vérifient ces conditions.

Lorsqu'un écoulement est irrotationnel, le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme du gradient d'un champ scalaire φ , appelé potentiel des vitesses. La conservation de la masse impose la nullité du Laplacien de φ :

$$\Delta\varphi = 0$$

Le potentiel des vitesses est donc une fonction harmonique des variables d'espace, ce qui implique son unicité pour des conditions aux limites données. La seule connaissance de ce potentiel aux frontières du domaine suffit donc   le déterminer partout. Les méthodes que nous utilisons ici sont des méthodes intégrales et empruntent leur nom à cette propriété, puisque les seules inconnues du problème sont aux frontières.

Cette caractéristique confère aux méthodes intégrales plusieurs avantages par rapport aux autres méthodes :

- Le nombre de dimensions du problème est réduit de un. On a donc à résoudre un problème à une dimension pour un phénomène supposé plan ou axi-symétrique, un problème à deux dimensions pour un phénomène tri-dimensionnel.
- Le maillage de la surface peut être adapté facilement à la géométrie locale de la surface. Par exemple, si l'on est en présence d'une région de forte courbure, on peut raffiner le maillage localement de manière à résoudre correctement l'écoulement dans cette zone. Sur le plan purement numérique, il est beaucoup plus simple de raffiner localement un maillage curviligne à une dimension qu'un maillage cartésien à deux dimensions.

En résumé, l'utilisation de telles méthodes nous permet ici de résoudre des écoulements potentiels et nous offre la possibilité de décrire avec la précision souhaitée, localement, les régions de la surface de forte courbure.

4. Etude du déferlement plongeant

Le déferlement plongeant est un phénomène bien connu de tous, et plus particulièrement des surfeurs, puisqu'il est observable sur la plupart des plages, provoqué par des effets bathymétriques [18]. Ce type de déferlement peut également s'observer en pleine mer ; il est alors généré par (i) un mécanisme de focalisation spatio-temporelle des vagues dû à leur caractère dispersif (accumulation de l'énergie de plusieurs vagues de longueurs d'onde différentes), (ii) une instabilité non-linéaire (de type modulationnel) ou (iii) l'action d'un courant adverse. Nous présentons d'abord la méthode intégrale utilisée pour résoudre le problème bi-dimensionnel, puis quelques calculs effectués avec cette méthode. Enfin, nous discutons une méthode permettant de corriger la vitesse potentielle pour les fluides faiblement visqueux.

4.1. Méthode intégrale pour les écoulements plans périodiques

Faisons plusieurs hypothèses simplificatrices :

- L'écoulement est supposé irrotationnel et le fluide incompressible.
- Le phénomène est plan, c'est-à-dire qu'on suppose négligeables les vitesses suivant \mathbf{e}_z (Cf. 4.1).
- l'écoulement est périodique en espace : le potentiel des vitesses et la fonction de courant en un point du bord gauche et un point de même cote du bord droit sont égaux.
- L'air au-dessus de la vague n'a pas d'influence sur le mouvement de celle-ci. On a donc affaire à une surface libre, et non pas à une interface entre deux fluides dynamiquement actifs.
- Le fond est horizontal.

Ces hypothèses nous permettent de mettre au point une méthode d'intégrales de frontières. Cette méthode a été développée par Vinje et Brevig [52] et ne nécessite pas, contrairement à la grande majorité des méthodes intégrales, de lissage des points de la surface ou du potentiel des vitesses.

Soient φ le potentiel des vitesses et ψ la fonction de courant. φ et ψ sont tels que :

$$\mathbf{w} = \nabla\varphi \quad (4.1)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z) \quad (4.2)$$

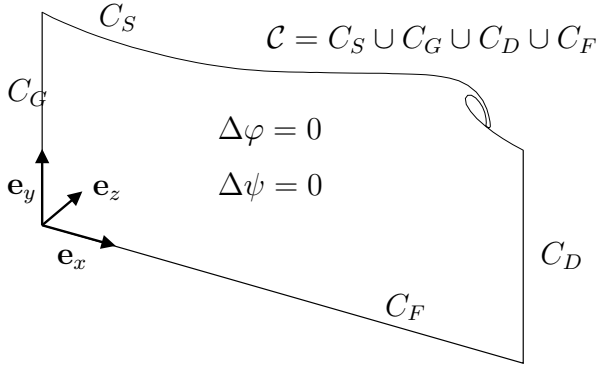


FIG. 4.1.: Plan de calcul du déferlement plongeant. A l'intérieur du contour fermé, le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant ψ vérifient l'équation de Laplace.

où \mathbf{w} est la vitesse d'une particule fluide et \mathbf{e}_z le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de calcul. Le potentiel des vitesses et la fonction de courant vérifient l'équation de Laplace :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (4.3)$$

$$\Delta\psi = 0 \quad (4.4)$$

déduite de la condition de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

Soit $\beta(z)$ le potentiel complexe défini comme :

$$\beta(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

où $z = x + iy$.

Nous allons maintenant décomposer le contour \mathcal{C} en deux parties :

- une partie comprenant la surface libre et le bord droit, par exemple, sur lesquelles le potentiel φ est supposé connu. Appelons C_φ cette réunion.
- une partie C_ψ comprenant le bord gauche et le fond sur lesquels la fonction de courant ψ est supposée connue (ψ est en effet connue au fond, à une constante près, puisque la vitesse verticale y est nulle, donc ψ y est constante). On pose $\psi = 0$ sur le fond.

φ et ψ vérifiant chacun l'équation de Laplace, le potentiel complexe est une fonction analytique de la variable z . Le théorème de Cauchy peut donc s'appliquer au contour fermé \mathcal{C} :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\beta(z)}{z - z_e} dz = 0 \quad (4.5)$$

où z_e est un point extérieur au contour. Cette intégrale possède une limite lorsque le point z_e tend vers un point de la surface. Cette limite est égale à (Cf. Annexe B) :

$$i\alpha_e\beta(z_e) + \int_{C-z_e} \frac{\beta(z)}{z-z_e} dz = 0 \quad (4.6)$$

où l'intégrale doit être prise au sens de la valeur principale de Cauchy. $i\alpha_e\beta(z_e)$ est le résidu et α_e est égal à π pour une surface lisse.

Soit z_ψ un point de C_ψ . La partie imaginaire de l'équation 4.6 est nulle, ce qui permet d'écrire une équation de Fredholm de seconde espèce pour $\varphi(z_\psi)$:

$$\pi\varphi(z_\psi) + \int_{C-z_\psi} \varphi(s) \operatorname{Im}(e^{i\theta}/(z-z_\psi)) ds + \int_{C-z_\psi} \psi(s) \operatorname{Re}(e^{i\theta}/(z-z_\psi)) ds = 0 \quad (4.7)$$

où l'élément différentiel dz a été remplacé par $e^{i\theta(s)} ds$, s est l'abscisse curviligne le long du contour.

De même, si z_φ est un point de C_φ , la nullité de la partie réelle de l'équation 4.6 permet d'écrire une autre équation de Fredholm de seconde espèce :

$$\pi\psi(z_\varphi) + \int_{C-z_\varphi} \varphi(s) \operatorname{Im}(e^{i\theta}/(z-z_\varphi)) ds + \int_{C-z_\varphi} \varphi(s) \operatorname{Re}(e^{i\theta}/(z-z_\varphi)) ds = 0 \quad (4.8)$$

Une alternative à cette formulation serait d'écrire la partie imaginaire de l'équation 4.6 pour un point de C_φ et sa partie réelle pour un point de C_ψ . Cette méthode conduit à deux équations de Fredholm de première espèce, dont on ne peut pas assurer l'unicité de la solution, contrairement aux équations de Fredholm de seconde espèce. Il est donc important de conserver cette formulation. Les équations de Fredholm ne seront plus utilisées par la suite, mais servent à légitimer l'utilisation des deux équations :

$$\operatorname{Im}\left(\int_C \frac{\beta(z)}{z-z_\psi} dz\right) = 0 \quad z_\psi \in C_\psi \quad (4.9)$$

$$\operatorname{Re}\left(\int_C \frac{\beta(z)}{z-z_\varphi} dz\right) = 0 \quad z_\varphi \in C_\varphi \quad (4.10)$$

La résolution de ces équations permet de déterminer φ et ψ sur l'ensemble du contour C , en ayant supposé que φ était déjà connu sur une partie C_φ et ψ connue sur son complémentaire. La périodicité permet de supprimer du système d'équations les inconnues sur les bords du domaine.

Une fois que φ et ψ sont connus sur l'ensemble du contour, on peut déterminer la vitesse complexe $w = u - iv$ grâce à une propriété du potentiel complexe :

$$\frac{d\beta(z)}{dz} = w$$

Connaissant la vitesse des particules fluides, on peut advecter les points de la surface grâce à la condition cinématique :

$$\frac{dz}{dt} = \bar{w}$$

où \bar{w} est le complexe conjugué de w ; et le potentiel des vitesses grâce à l'équation de Bernoulli sur la surface :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}w\bar{w} + \frac{\sigma}{\rho g \lambda^2} \kappa - y$$

où σ est le coefficient de tension de surface, g l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique du liquide, κ la courbure locale de la surface, y la cote du point considéré et λ la longueur d'onde de la vague. La vitesse de référence $\sqrt{\lambda g}$ a été utilisée pour dimensionner l'équation de Bernoulli.

Le nombre de Bond $\rho g \lambda^2 / \sigma$ permet donc de "dimensionner" la vague. Deux contraintes s'appliquent à la vague : la tension de surface et la force volumique due à la gravité. L'importance relative de l'une par-rapport à l'autre détermine la dynamique du déferlement.

4.2. Discrétisation des équations

La discrétisation des équations 4.9 et 4.10 permet d'obtenir le potentiel des vitesses à la surface libre et sur le fond. Le contour, dans sa totalité, est représenté par des segments sur chacun desquels le potentiel complexe est supposé varier linéairement (Cf. Fig. 4.2).

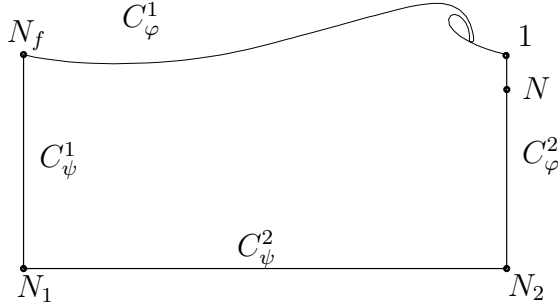


FIG. 4.2.: Plan de calcul du déferlement plongeant. N point de collocation sont utilisés pour décrire le contour.

Dans l'intervalle $[j, j+1]$, le potentiel complexe s'exprime en fonction des valeurs β_j et β_{j+1} aux points de collocation :

$$\beta(z) = \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \beta_j + \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} \beta_{j+1}$$

L'équation de Cauchy s'écrit donc, pour un point z_k du contour :

$$\sum_{j=1}^N \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{1}{z - z_k} \left(\frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \beta_j + \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} \beta_{j+1} \right) dz = 0 \quad z_k \in \mathcal{C}$$

où l'indice $N + 1$ est assimilé à l'indice 1, étant donné que le contour est fermé. Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{z_j - z_{j+1}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{z - z_{j+1}}{z - z_k} dz + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{z - z_j}{z - z_k} dz = 0$$

Les intégrales peuvent être calculées analytiquement, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{z_j - z_{j+1}} \left[(z_{j+1} - z_j) + (z_k - z_{j+1}) \ln \frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} \right] + \\ \sum_{j=1}^N \frac{\beta_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} \left[(z_{j+1} - z_j) + (z_k - z_j) \ln \frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Un changement d'indice permet d'écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\sum_{j=1}^N \Gamma_{k,j} \beta_j = 0 \quad (4.12)$$

où $\Gamma_{k,j}$ sont les coefficients d'influence.

Pour $k \neq j$, $k \neq j - 1$ et $k \neq j + 1$, on a :

$$\Gamma_{k,j} = \frac{z_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \ln \frac{z_j - z_k}{z_{j-1} - z_k} + \frac{z_k - z_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} \ln \frac{z_j - z_k}{z_{j+1} - z_k} \quad \text{pour } j \in [1, N]$$

où on assimile, une fois de plus, l'indice $N + 1$ à l'indice 1 et l'indice 0 à l'indice N . Étant donné que $\lim_{z \rightarrow 0} (z \ln z) = 0$, on a :

$$\Gamma_{j-1,j} = \frac{z_{j-1} - z_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} \ln \frac{z_j - z_{j-1}}{z_{j+1} - z_{j-1}} \quad \Gamma_{j+1,j} = \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \ln \frac{z_j - z_{j+1}}{z_{j-1} - z_{j+1}}$$

Les coefficients devant les logarithmes ont chacun une limite lorsque z_k tend vers z_j , égales respectivement à 1 et -1 . La valeur de $\Gamma_{j,j}$ s'obtient donc grâce à :

$$\Gamma_{j,j} = \lim_{z_k \rightarrow z_j} \ln \left(\frac{z_j - z_k}{z_{j-1} - z_k} \frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} \right) = \ln \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j}$$

Connaissant les coefficients d'influence, on peut maintenant écrire les équations 4.9 et 4.10 sur C_ψ et C_φ respectivement :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (Re(\Gamma_{k,j}) \varphi_j - Im(\Gamma_{k,j}) \psi_j) &= 0 \quad z_k \in C_\psi \\ \sum_{j=1}^N (Re(\Gamma_{k,j}) \psi_j - Im(\Gamma_{k,j}) \varphi_j) &= 0 \quad z_k \in C_\varphi \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de N équations à N inconnues. La discrétisation du contour est effectuée de telle sorte qu'il y ait autant de points de collocations sur les deux bords verticaux, et le même nombre de points sur la surface libre et sur le fond. φ étant connu sur le bord droit, on peut remplacer les inconnues φ_j sur le bord gauche par $\varphi_{N_1-j+N_2}$ dans le système d'équations précédentes. De même, on peut remplacer ψ_j sur le bord droit par $\psi_{N_1-j+N_2}$.

Le système est résolu par une méthode LU classique. On peut alors advecter les points de la surface libre grâce à la condition cinématique et le potentiel des vitesses grâce à l'équation de Bernoulli. Le schéma utilisé est un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. Le pas de temps utilisé est constant. La longueur d'onde choisie est de 2π , ce qui correspond à un nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ de 1.

4.3. Vagues déferlantes

Dans le cadre de la théorie potentielle, l'évolution spatio-temporelle des ondes à la surface de l'océan est régie par le système d'équations suivant :

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{pour } -d \leq z \leq \eta(x, z, t) \quad (4.13)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + y - \frac{\kappa}{Bo} = C^{ste} \quad \text{en } z = \eta(x, z, t) \quad (4.14)$$

$$\eta_t + \eta_x \phi_x + \eta_z \phi_z - \phi_y = 0 \quad \text{en } z = \eta(x, z, t) \quad (4.15)$$

$$\varphi_z = 0 \quad \text{en } y = -d \quad (4.16)$$

Ce système d'équations admet pour solutions les ondes de Stokes qui sont des ondes progressives bidimensionnelles de forme permanente et symétrique, voyageant à vitesse constante. Nous nous intéresserons ici au problème bidimensionnel du déferlement d'ondes de gravité (nombre de Bond $Bo = \infty$) ou des ondes de gravité courtes pour lesquelles les effets de tension superficielle sont petits devant ceux dus à la gravité (nombre de Bond $Bo \gg 1$) mais suffisants pour devenir localement non négligeables, là où la courbure est importante. Ces solutions dépendent aussi de deux autres paramètres qui correspondent respectivement aux effets non-linéaires et dispersifs. La cambrure de la vague, définie par $\epsilon = ak$ (a , amplitude et k , nombre d'onde) et $\mu = kd$ mesurent respectivement la non-linéarité et la dispersion de l'onde. D'une manière générale les ondes de Stokes sont instables aux perturbations de type *Benjamin-Feir* (pour plus de détails voir l'article de revue de Dias & Kharif [11]). Cette instabilité provoque une modulation de l'amplitude, de la fréquence et du nombre d'onde du train d'ondes de Stokes initial, générant ainsi des groupes d'ondes au sein desquels certaines crêtes atteignent une forme limite pouvant conduire au déferlement. Pour s'affranchir du problème du calcul de stabilité d'un train d'ondes de Stokes, nous avons choisi de forcer le déferlement en considérant comme condition initiale une

onde sinusoïdale, $\eta(x, 0) = a \cos x$, d'amplitude a très élevée, dont le potentiel des vitesses est donné par la théorie linéaire. Il est bien connu que cette condition initiale conduit très rapidement à un déferlement de type plongeant.

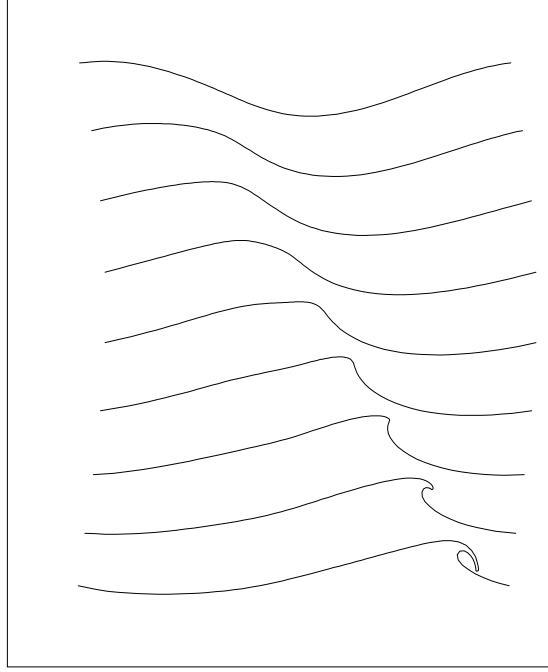


FIG. 4.3.: Déferlement d'une vague de gravité de longueur d'onde 141 cm et de cambrure $\epsilon = 0.4$.

La figure 4.3 représente les étapes successives du déferlement d'une vague de longueur d'onde 141 cm et de cambrure $\epsilon = 0.4$. On remarque que la surface est fortement courbée à la pointe de la crête, au stade ultime du déferlement. Pour les paramètres physiques de l'eau, le nombre de Bond $\rho g \lambda^2 / \sigma$ est environ égal à $2 \cdot 10^5$. La tension de surface joue donc un rôle minime dans la dynamique du déferlement de ce type de vague. En revanche, si l'on diminue la longueur d'onde de la vague, on constate que la tension de surface a pour effet de lisser les régions de forte courbure. Une comparaison est représentée sur la figure 4.4 entre le dernier profil du calcul précédent et le même pour une vague de 60 cm de longueur d'onde. Pour cette longueur d'onde, le nombre de Bond est égal à $8 \cdot 10^4$, valeur encore très grande. Si la prise en compte de la tension de surface se fait ressentir pour cette vague, c'est parce que la courbure de la surface, au voisinage de la crête, prend des valeurs comparables au nombre de Bond, ce qui rend les contraintes surfaciques comparables – localement – à la force de gravité.

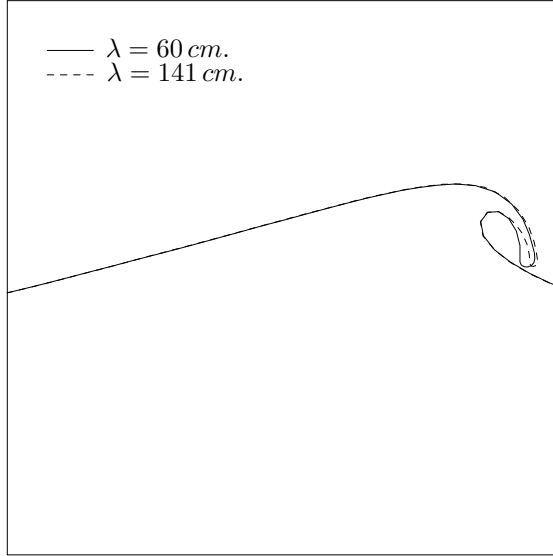


FIG. 4.4.: Comparaison entre le déferlement d'une vague de 60 cm de longueur d'onde et une de 141 cm

4.4. Correction pour les fluides faiblement visqueux

Lorsqu'un fluide est peu visqueux, comme l'eau, ou lorsque l'on étudie le phénomène aux instants courts, la couche de vorticité générée par la viscosité garde une faible épaisseur comparée aux dimensions du problème. Il est alors possible de faire un développement limité des équations de Navier Stokes en fonction de cette épaisseur pour corriger la vitesse potentielle décrite par l'équation de Bernoulli. Nous présentons, dans cette partie, le développement mathématique de cette méthode, décrite originellement par T.S. Lundgren.

L'épaisseur δ de la couche limite qui se développe près d'une interface se comporte comme $\sqrt{\nu t}$, où ν est la viscosité cinématique du fluide et t le temps. Dans cette section, nous ferons l'hypothèse suivante :

$$\delta = \mathcal{O}(\nu^{1/2})$$

Ceci revient étudier le phénomène aux instants courts.

On adopte à la surface libre un repère local $(M, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{z})$, en chaque point d'étude, où \mathbf{n} est la normale unitaire à la surface, \mathbf{s} la tangente dans le plan d'étude et \mathbf{z} le vecteur perpendiculaire à \mathbf{n} et à \mathbf{s} , tel que la base ainsi formée soit directe. La formulation utilisée ici est eulérienne :    un instant fixé, on définit le repère $(M, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{z})$ en un point générique de la surface, ce qui légitime le fait d'écrire les équations de conservation dans ce repère.

On peut décomposer tout champ de vecteur – et en particulier le champ de vitesse \mathbf{v} – en une partie \mathbf{u} dont le rotationnel est nul et une partie \mathbf{U} dont la divergence est nulle :

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{U} \quad (4.17)$$

On a alors :

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi$$

$$\mathbf{U} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

où \mathbf{A} est le vecteur potentiel. On peut faire le même raisonnement pour \mathbf{A} : il se décompose en une partie $\nabla\varphi'$ et une partie \mathbf{A}' dont la divergence est nulle. La première partie n'ajoute pas de terme au champ de vitesses puisque son rotationnel est nul. On choisit donc \mathbf{A} , de divergence nulle, tel que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

Le fluide étant supposé incompressible, la divergence du vecteur vitesse est nulle et l'on a :

$$\Delta\varphi = 0$$

Soit ω le vecteur tourbillon défini par :

$$\omega = \nabla \wedge \mathbf{V}$$

Ce champ de vecteurs est relié à \mathbf{A} par la relation :

$$\Delta\mathbf{A} = -\omega \quad (4.18)$$

Définissons la pression grâce à la relation de Bernoulli :

$$p = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} - \frac{gl_0}{v_0^2}z + P \quad (4.19)$$

où P est la surpression due à la partie rotationnelle de l'écoulement, l_0 et v_0 sont une longueur et une vitesse de référence.

L'écoulement étant supposé plan, les vecteur \mathbf{A} et ω n'ont qu'une composante non nulle : A_z et ω_z . Dans ce cas, on :

$$U_n = \frac{\partial A_z}{\partial s} \quad (4.20)$$

$$U_s = -\frac{\partial A_z}{\partial n} \quad (4.21)$$

4.4.1. Bilan des contraintes à l'interface

A la surface libre, il existe une différence de pression entre les deux fluides équilibrée par la tension superficielle. Le bilan des contraintes normales s'écrit donc :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_S = \frac{\sigma}{\rho v_0^2} \kappa \quad (4.22)$$

où $T_{ij} = -p\delta_{ij} + (v_0\nu/l_0)(V_{i,j} + V_{j,i})$, σ est la tension de surface, ρ la masse volumique, κ la courbure locale moyenne de la surface, v_0 et l_0 une vitesse et une longueur de référence.

L'existence d'une viscosité impose la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles. Si l'on suppose, dans le cas présent, que l'air est dynamiquement inactif, alors sa contribution au bilan des contraintes tangentielles doit être prise égale à zéro :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_S = 0 \quad (4.23)$$

De cette dernière équation, on déduit que :

$$s_i V_{i,j} n_j = -n_i V_{i,j} s_j \quad (4.24)$$

expression que l'on peut écrire dans le repère local :

$$u_{n,s} + U_{n,s} = -u_{s,n} - U_{s,n}$$

4.4.2. Ordres de grandeur

L'écoulement du fluide possède, dans son ensemble, une composante irrotationnelle que nous avons notée \mathbf{u} et que nous prendrons comme référence des ordres de grandeur :

$$\|\mathbf{u}\| = \mathcal{O}(1)$$

Près de l'interface, il existe une mince couche de fluide d'épaisseur δ dans laquelle la dissipation visqueuse est non-négligeable, c'est-à-dire où le champ de vitesses irrotationnelles ne suffit pas pour décrire l'écoulement. On superposera donc, dans cette couche limite, l'écoulement irrotationnel à un écoulement purement rotationnel \mathbf{U} . En outre, on supposera que les effets visqueux disparaissent en dehors de la couche limite.

De cette dernière remarque, on peut déduire que les dérivées, suivant la normale à l'interface, de grandeurs liées à l'écoulement rotationnel sont de l'ordre de δ^{-1} fois ces grandeurs elles-mêmes ; et que les dériver suivant la tangente ne change pas leur ordre (approximation de couche limite).

Du fait que $\omega_z = V_{s,n} - V_{n,s} = -2V_{n,s}$, et que $V_{n,s}$ est du même ordre que V_n ($\mathcal{O}(1)$), on a :

$$\omega_z = \mathcal{O}(1)$$

Or, on a :

$$\omega_z = 2V_{s,n} = 2u_{s,n} + \mathcal{O}(\delta^{-1}U_s)$$

Donc la vitesse U_s est nécessairement d'un ordre de grandeur au plus égal à δ . Postulons que U_s est effectivement d'ordre δ :

$$U_s = \mathcal{O}(\delta)$$

La divergence du champ \mathbf{U} étant nulle, on connaît également l'ordre de grandeur de U_n :

$$U_n = \mathcal{O}(\delta^2)$$

De l'équation :

$$\Delta A_z = -\omega_z$$

on peut déduire l'ordre de grandeur de A_z :

$$A_z = \mathcal{O}(\delta^2)$$

4.4.3. Equation de transport de A_z

L'objectif de cette étude est de corriger la vitesse potentielle normale pour prendre en compte la couche limite visqueuse :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\varphi + U_n\mathbf{n}$$

Or la vitesse normale U_n est égale à la dérivée tangentielle de la composante suivant z du vecteur potentiel \mathbf{A} . Il faut donc écrire une équation de transport pour A_z .

L'équation vectorielle de Navier-Stokes sans dimension pour un fluide newtonien incompressible en présence de gravité s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \frac{gl_0}{v_0^2}\mathbf{e}_y + \frac{\nu}{v_0 l_0}\Delta \mathbf{v} \quad (4.25)$$

où l_0 et v_0 sont une longueur et une vitesse de référence, ν est la viscosité cinématique du fluide. $Re = v_0 l_0 / \nu$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement.

Si l'on calcule le rotationnel de cette expression, on obtient une équation de transport pour la composante suivant z du vecteur tourbillon, dans laquelle n'apparaissent plus la pression et le terme dû à la gravité :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega_z = \omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{Re}\Delta \omega_z \quad (4.26)$$

où $\partial v_z / \partial z$ est nul ¹.

D'après l'équation 4.18, on a :

$$\Delta \frac{\partial A_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\Delta A_z) = \frac{1}{Re}\Delta(\Delta A_z) \quad (4.27)$$

¹Écoulement plan

Si l'on utilise la décomposition de la vitesse définie précédemment, on se rend compte que le terme $(\mathbf{U} \cdot \nabla)(\Delta A_z)$ est d'ordre au plus égal à δ . La partie potentielle du terme convectif peut, quant à elle, s'écrire :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\Delta A_z) &= u_n A_{z,nnn} + u_s A_{z,snn} + \mathcal{O}(\delta) \\
 &= \partial_n(u_n A_{z,nn}) + \partial_n(u_s A_{z,sn}) - u_{n,n} A_{z,nn} + \mathcal{O}(\delta) \\
 &= \partial_n(\partial_n(u_n A_{z,n}) + \partial_n(\partial_n(u_s A_{z,s})) \\
 &\quad - u_{n,n} A_{z,n}) - \partial_n(u_{n,n} A_{z,n}) + \mathcal{O}(\delta) \\
 &= \partial_{nn}(u_n A_{z,n} + u_s A_{z,s}) - 2\partial_{nn}(u_{n,n} A_z) + \mathcal{O}(\delta) \\
 &= \Delta((\mathbf{u} \cdot \nabla)A_z + 2u_{s,s}A_z) + \mathcal{O}(\delta)
 \end{aligned}$$

le passage à la dernière égalité utilisant la nullité de la divergence de \mathbf{u} et le fait que les dérivées suivant s n'introduisent que des termes d'ordre inférieur à δ .

On peut alors utiliser le fait que :

$$\Delta A_z = -\omega_z = 2V_{n,s} = 2u_{n,s} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

ainsi que le fait que ν doit être de l'ordre de δ^2 pour que cette théorie soit valable. On obtient :

$$\Delta\left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)A_z + 2u_{s,s}A_z - \frac{2u_{n,s}}{Re}\right) = \mathcal{O}(\delta) \quad (4.28)$$

Les deux dérivées suivant \mathbf{n} augmentant chacune l'ordre de δ , le terme sous le Laplacien est d'ordre δ^3 . Le terme $(\mathbf{U} \cdot \nabla)A_z$ étant d'ordre δ^3 , on obtient :

$$\frac{dA_z}{dt} = -2u_{s,s}A_z + \frac{2}{Re}u_{n,s} + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (4.29)$$

où la dérivée particulière est définie comme :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} + U_n \mathbf{n}) \cdot \nabla$$

4.4.4. Equation de transport de U_n

En substituant l'expression de p donnée par l'équation 4.19 à l'équation de Navier-stokes adimensionnée 4.25, on obtient une équation de transport pour \mathbf{U} :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} \quad (4.30)$$

de laquelle on déduit, en calculant le produit scalaire avec \mathbf{n} , une équation pour la composante normale U_n de \mathbf{U} :

$$\frac{dU_n}{dt} - \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) u_n = -\frac{\partial P}{\partial n} + \nu \Delta U_n \quad (4.31)$$

Les termes dominants de cette équation sont d'ordre δ , donc ∇P doit l'être également. Or, $\partial P / \partial n$ est de l'ordre de $\delta^{-1} P$ puisque le gradient comprend une dérivée suivant la normale. On en déduit que :

$$P = \mathcal{O}(\delta^2)$$

4.4.5. Détermination de la surpression dans la couche limite

Dans l'équation de transport de U_n , si l'on décide de négliger les termes d'ordre supérieur à δ^2 , on doit remarquer que :

$$\nu \frac{\partial^2 U_n}{\partial s^2} = \mathcal{O}(\delta^4)$$

$$\nu \frac{\partial^2 U_n}{\partial n^2} = \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$\frac{dU_n}{dt} = \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$U_n \frac{\partial u_n}{\partial n} = \mathcal{O}(\delta^2)$$

On obtient ainsi une équation pour la dérivée normale de P :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} - U_s \frac{\partial u_n}{\partial s} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (4.32)$$

Calculons maintenant la quantité :

$$\alpha = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} \cdot \mathbf{n}$$

avec

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt}$$

où O est un point du plan et M le point d'étude sur la surface libre.

On peut intervertir la dérivée partielle et la dérivée particulaire, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s} \right) \cdot \mathbf{n}$$

où

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s} = \mathbf{s}$$

est la tangente à la surface.

On a donc :

$$\alpha = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt}$$

Le premier terme du second membre de l'équation 4.32 peut s'écrire :

$$\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} = U_s \left(\mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

Soit, en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= -U_s \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} \cdot \mathbf{n} \right) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= -U_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{n} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= -U_s \frac{\partial u_n}{\partial s} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -2U_s \frac{\partial u_n}{\partial s} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

Or, $U_s = -A_{z,n}$, donc :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(A_z \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

En intégrant cette dernière égalité, on obtient une définition de la surpression dans la couche limite, en fonction seulement de données de la surface libre :

$$P = 2A_z \frac{\partial u_n}{\partial s} + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (4.33)$$

4.4.6. Condition dynamique

La condition dynamique à la surface libre s'obtient en remplaçant l'expression de p (4.19) dans le bilan des contraintes normales :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{gl_0}{v_0^2} z - 2A_z \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{2\nu}{v_0 l_0} \frac{\partial V_n}{\partial n} = \frac{\sigma}{\rho v_0^2} \kappa + \mathcal{O}(\delta^3)$$

$\partial U_n / \partial n$ est de l'ordre de δ^3 , donc on peut simplifier cette équation et faire intervenir la dérivée particulière de φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} - U_n u_n - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{gl_0}{v_0^2} z - 2A_z \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{2\nu}{v_0 l_0} \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\sigma}{\rho v_0^2} \kappa + \mathcal{O}(\delta^3)$$

On dispose ainsi d'une condition dynamique pour le potentiel φ à la surface libre, faisant intervenir A_z , préalablement calculé grâce à son équation de transport 4.29.

4.4.7. Récapitulatif

Nous venons de présenter une méthode permettant de corriger la vitesse potentielle déduite de l'équation de Bernoulli. Cette correction nécessite la résolution d'une équation de transport pour la composante suivant z du vecteur potentiel \mathbf{A} .

La condition cinématique peut désormais s'écrire :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\varphi + U_n \mathbf{n} \quad (4.34)$$

où U_n est déterminée grâce à la relation :

$$U_n = \frac{\partial A_z}{\partial s} \quad (4.35)$$

La condition dynamique à la surface libre s'écrit :

$$\frac{d\varphi}{dt} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{gl_0}{v_0^2} z - 2A_z \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{2\nu}{v_0 l_0} \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\sigma}{\rho v_0^2} \kappa + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (4.36)$$

A_z est calculé en résolvant son équation de transport :

$$\frac{dA_z}{dt} = -2u_{s,s} A_z + \frac{2}{Re} u_{n,s} + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (4.37)$$

On pourrait imaginer corriger également la vitesse tangentielle. Néanmoins, cette correction ne modifie en rien l'évolution de la surface, puisqu'une surface géométrique ne se déplace que suivant sa normale.

4.5. Conclusions

Une méthode d'intégrale de frontières pour les écoulements plans périodiques de fluides non visqueux a été présentée dans ce chapitre. Une formulation "prête à l'emploi" permettant de corriger la vitesse potentielle de l'interface pour les fluides faiblement visqueux a été développée. Elle n'a malheureusement pas pu être appliquée au cas du déferlement, des problèmes dus à la périodicité étant survenus lors de l'implémentation.

La méthode intégrale pourrait être assez facilement appliquée aux écoulements non périodiques comme, par exemple, une onde solitaire déferlant sur une plage. La seule condition nécessaire à cette formulation est la connaissance soit du potentiel des vitesses, soit de la fonction de courant sur chacune des portions du contour. Ainsi, toute frontière solide vérifie cette condition puisque la fonction de courant y est constante (constante que l'on peut choisir nulle).

5. Méthode intégrale en trois dimensions

5.1. Equations gouvernant l'écoulement

Dans cette partie, nous décrivons le système d'équations régissant un écoulement potentiel en trois dimensions et les équations intégrales permettant de déterminer la densité de dipôles et la vitesse normale à l'interface.

Equations intégrales

Si un champ de vitesse \mathbf{u} est tel que son rotationnel est nul partout, alors il peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi$$

où φ est appelé potentiel des vitesses et est défini à une fonction du temps près, puisque qu'il n'a de sens que par son gradient, donc par ses dérivées spatiales.

La condition d'incompressibilité, ou de conservation de la masse peut alors s'écrire :

$$\Delta\varphi = 0$$

ce qui signifie que φ est une fonction harmonique des variables d'espace. Cette propriété permet d'utiliser le théorème de Green et on montre, grâce à celui-ci, que pour une surface S enfermant un volume Ω , le potentiel en un point intérieur M peut s'exprimer en fonction du potentiel sur la surface :

$$4\pi\varphi(M) = \int_S \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right) dS \quad (5.1)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à la surface et λ la distance entre le point M et le point d'intégration sur la surface.

Si l'on considère maintenant le problème extérieur, toujours par rapport au point M , le théorème de Green permet d'écrire une seconde équation, similaire à la première, pour le potentiel extérieur φ' :

$$\int_S \varphi' \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS = \int_S \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\varphi'}{\partial n} dS$$

où \mathbf{n} est toujours la normale extérieure au premier milieu, c'est-à-dire la normale intérieure au second. En outre, la condition cinématique à la frontière des deux fluides impose la continuité des vitesses normales :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = \frac{\partial \varphi'}{\partial n}|_S$$

Appelons μ le saut de potentiel à l'interface : $\mu = \varphi - \varphi'$. L'équation 5.1 devient alors :

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (5.2)$$

Cette formulation montre de manière évidente que la valeur du potentiel en un point intérieur peut être obtenue grâce, uniquement, à la connaissance d'une densité de dipôles distribués sur la surface. Ceci montre également que le potentiel, et donc la vitesse tangentielle des particules fluides, sont discontinus à la traversée de l'interface. En effet, la continuité de la vitesse tangentielle est une caractéristique des écoulements visqueux et liée au développement d'une couche de vorticité près de l'interface. Dans le cas d'écoulement potentiels, cette vorticité reste, via la distribution de dipôles, confinée sur l'interface.

Il s'agit maintenant d'exprimer la valeur du potentiel sur la surface en fonction de cette répartition de dipôles, en prenant la limite de l'expression 5.2 lorsque le point M tend vers un point de la surface. On obtient (Cf. Annexe C) :

$$\varphi(M) = \frac{1}{2} \mu(M) - \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (5.3)$$

où $\mu(M)/2$ est le résidu et l'intégrale doit être prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Cette équation est une équation de Fredholm de seconde espèce pour μ . Si,    un instant t , on la suppose résolue, on connaît donc φ et μ en tout point de la surface, ce qui nous permet de calculer la vitesse des particules fluides sur l'interface.

Connaissant φ , on peut, dans un premier temps, calculer la vitesse tangentielle des particules fluides du milieu intérieur, à l'interface :

$$\mathbf{u}_t = \nabla_s \varphi$$

où ∇_s est l'opérateur gradient sur la surface.

Il reste, si l'on veut connaître la vitesse totale des particules à l'interface, à déterminer la vitesse normale à celle-ci. Pour cela, on introduit un vecteur potentiel \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Dans ce cas, on montre [29] que la vecteur \mathbf{A} peut s'exprimer en fonction de la densité de dipôles μ :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \mathbf{n} \wedge \nabla_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (5.4)$$

où l'intégrale doit encore être prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Le vecteur \mathbf{A} étant déterminé, on peut calculer la vitesse des particules fluides normale à l'interface :

$$u_n = (\mathbf{n} \wedge \nabla_s) \cdot \mathbf{A}$$

La détermination du champ de vitesse à l'interface nécessite donc uniquement la connaissance du potentiel des vitesses sur l'interface.

Suppression de la singularité du noyau des intégrales

La principale difficulté des méthodes intégrales réside dans le fait que les noyaux des intégrales précédentes sont singuliers. C'est pour cette raison qu'elles ont été introduites au sens de leur valeur principale. Pour supprimer cette singularité, on utilise une propriété mathématique de la fonction de Green :

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS = -2\pi \quad S \text{ surface fermée}$$

$$\int_S \mathbf{n} \wedge \nabla_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS = 0$$

Ces deux valeurs principales nous permettent d'écrire les équations 5.3 et 5.4 sous la forme :

$$\varphi(M) = \mu(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S (\mu(M) - \mu) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (5.5)$$

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mu - \mu(M)) \mathbf{n} \wedge \nabla_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (5.6)$$

où les intégrands ne présentent plus de singularités.

Il a été montré, dans divers articles, que les intégrands varient fortement à proximité du point M . Il est donc nécessaire d'intercaler des points supplémentaires sur la surface, servant uniquement au calcul. Dans le cas présent, nous avons utilisé des fonctions splines pour interpoler les valeurs de l'abscisse, de l'ordonnée des points de la surface, et de μ .

Equation de Bernoulli sur la surface

L'écoulement d'un fluide non visqueux est décrit par la condition dynamique, c'est-à-dire l'équation de Bernoulli de laquelle on peut déduire :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} - gz \quad \text{dans } \Omega \quad (5.7)$$

où ρ est la densité du fluide intérieur, p la pression intérieure par rapport à une pression de référence, g l'accélération de la pesanteur, z l'ordonnée du point considéré et la dérivée particulaire d'une grandeur α est définie comme :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \alpha$$

Il faut également vérifier la validité de l'équation de Laplace à l'interface, ou condition d'équilibre des contraintes normales :

$$[p]_s = \frac{\sigma}{\rho} \kappa \quad \text{sur } S = \partial\Omega \quad (5.8)$$

où σ est le coefficient de tension de surface et κ la courbure moyenne locale de la surface.

A ce stade, nous ferons l'hypothèse que le fluide extérieur est dynamiquement inactif et qu'il assure une pression uniforme sur l'interface. C'est pour cette raison qu'une seule équation de Bernoulli est écrite ; le potentiel φ' extérieur n'étant pas déterminé.

On peut réécrire l'équation de Bernoulli sur l'interface et utiliser la seconde équation pour supprimer la pression :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\sigma}{\rho} \kappa - gz \quad (5.9)$$

La pression atmosphérique n'apparaît pas dans cette équation car le potentiel φ est défini à une fonction du temps près, donc $d\varphi/dt$ à une constante près. Remarquons que la courbure intervenant dans cette équation est une courbure algébrique, dans la mesure où le saut de pression peut prendre des valeurs positives ou négatives. Il faut donc définir la courbure en ayant préalablement orienté la surface.

On peut maintenant rendre l'équation 5.9 sans dimension de deux manières différentes : soit en utilisant comme vitesse de référence \sqrt{Rg} , où R est une longueur caractéristique du problème considéré, soit en utilisant $\sqrt{\sigma/\rho R}$. On obtient respectivement :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\sigma}{\rho g R^2} \kappa - z \quad (5.10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \kappa - \frac{\rho g R^2}{\sigma} z \quad (5.11)$$

où le nombre de Bond $\rho g R^2 / \sigma$ est le seul nombre sans dimension déterminant ce type d'écoulement. Ces deux équations sont rigoureusement identiques puisqu'il suffit de multiplier la première par le nombre de Bond pour obtenir la seconde. Néanmoins, grâce à cette écriture, on peut voir plus facilement les deux comportements asymptotiques de ce genre de problème ; à savoir, d'une part, si les effets de tension de surface sont négligeables ou, d'autre part, si la gravité est négligeable. Dans le premier cas, le terme de tension superficielle de l'équation 5.10 disparaît et l'écoulement devient universel ; dans le second, c'est le terme dû à la gravité qui disparaît de l'équation 5.11 et l'écoulement devient également universel.

Ce raisonnement simple nous conduit à des considérations numériques. Si l'on ne prend pas en compte la gravité, par exemple, il est important de connaître l'ordre de grandeur des rapports d'échelles de la courbure, de manière à faire le calcul pour obtenir des valeurs de φ acceptables ($\mathcal{O}(1)$).

Condition cinématique

La condition cinématique exprime le fait que la vitesse normale à l'interface des particules fluides est égale à la vitesse de la surface. Soit \mathbf{x} la position d'un point de la surface ; si \mathbf{u} est la vitesse de la particule ayant cette position à un instant donné et \mathbf{n} la normale à la surface, la condition cinématique s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (5.12)$$

5.2. Cas particulier d'un écoulement à symétrie axiale

Les équations précédemment établies sont valables pour un écoulement tridimensionnel. Lorsque le problème est axi-symétrique, il est possible de simplifier considérablement ces équations.

Si l'on décrit l'écoulement dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on peut supposer, pour certains problèmes comme la coalescence de deux gouttes en apesanteur, qu'aucune variable n'a de dépendance en θ , c'est-à-dire que $\partial/\partial\theta \equiv 0$ pour toutes les grandeurs du problème. En particulier, et dans la suite de ce chapitre, on suppose que la vitesse dans la direction θ est nulle.

Soit M un point de calcul de coordonnées $(R, 0, Z)$. La distance λ entre ce point et le point P de coordonnées (r, θ, z) peut s'écrire :

$$\lambda(R, Z, r, \theta, z) = \sqrt{(r + R)^2 - 2rR(1 + \cos \theta) + (z - Z)^2} \quad (5.13)$$

On peut décomposer les intégrales des équations 5.1 et 5.6 en séparant les intégrations en r , θ et z :

$$\varphi(M) = \mu(M) + \frac{1}{4\pi} \int_s (\mu(M) - \mu) r \int_\theta \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) d\theta ds \quad (5.14)$$

$$\mathbf{A}(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_s (\mu(M) - \mu) r \int_\theta \mathbf{n} \wedge \nabla_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) d\theta ds \quad (5.15)$$

où s est l'abscisse curviligne décrivant la surface.

On montre (Cf. Annexe C), que les deux intégrales sur θ peuvent s'exprimer en fonction d'intégrales elliptiques :

$$\varphi(M) = \mu(M) + \int_s (\mu(M) - \mu) K_\varphi ds \quad (5.16)$$

$$A_\theta(M) = - \int_s (\mu(M) - \mu) K_A ds \quad (5.17)$$

où K_φ et K_A sont des fonctions des intégrales elliptiques complètes de premier et troisième type.

Les vitesses tangentielle et normale s'obtiennent, en symétrie axiale, à partir, respectivement, de φ et A_θ :

$$u_t = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (5.18)$$

$$u_n = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial s} \quad (5.19)$$

Le calcul de la vitesse normale pose un problème sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire pour $r = 0$. On constate que la limite de A_θ quand r tend vers zéro doit nécessairement être nulle. En effet, si l'on décompose u_n , on trouve :

$$u_n = \frac{\partial A_\theta}{\partial s} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial r}{\partial s}$$

On sait que $\lim_{r \rightarrow 0} \partial r / \partial s = 1$, donc pour que la vitesse normale sur l'axe de symétrie ait une valeur finie, on doit vérifier :

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_\theta = 0$$

Partant de ce fait, le développement limité en zéro de A_θ s'écrit :

$$A_\theta(s \ll 1) = s \frac{\partial A_\theta}{\partial s} + o(s^2) \quad (5.20)$$

Etant donné que $s \sim r$ en zéro, on a finalement :

$$u_n(0) = 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial s} \quad (5.21)$$

Un raisonnement identique conduit à la même formule pour l'autre pôle.

5.3. Méthode numérique

Le système d'équations à résoudre est composé de la conservation de la masse (équation de Laplace pour φ écrite sous forme intégrale), de l'équation de Bernoulli sur la surface et de la condition cinématique :

$$\Delta \varphi = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - z + \frac{\kappa}{Bo} \quad (5.23)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (5.24)$$

Si l'on définit la surface à l'aide de points (\mathbf{x}) , il apparaît que la vitesse tangentielle de ces points est arbitraire puisqu'une surface géométrique n'a pas de vitesse tangentielle. Le choix le plus simple est de prendre la vitesse des

particules fluides, ce qui revient à utiliser, non plus la condition cinématique précédente, mais :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}$$

La méthode intégrale utilisée ici peut être récapitulée ainsi :

- Connaissant la position des points de l'interface et le potentiel φ à l'instant initial, on peut déterminer μ en chacun de ces points en résolvant l'équation de Fredholm 5.16
- La courbure locale est calculée en tous les points de l'interface
- μ permet de déterminer le vecteur potentiel \mathbf{A} à la surface grâce à l'intégrale 5.17 et ainsi d'obtenir la vitesse normale u_N
- φ permet de calculer la vitesse tangentielle des particules fluides u_S
- Les points de l'interface sont advectés grâce à ces deux composantes de la vitesse
- Le potentiel φ est advecté en temps grâce à l'équation de Bernoulli

On connaît ainsi φ et les positions des points de l'interface à l'instant suivant et on peut itérer le processus.

Description de la surface et des champs scalaires

Le calcul des intégrales nécessite une interpolation des points de la surface et des valeurs de φ et μ . En outre, le calcul de la courbure moyenne locale est difficile à effectuer sans une interpolation, puisqu'il fait intervenir la dérivée seconde des coordonnées des points par rapport à l'abscisse curviligne. Si l'on souhaite que la courbure soit continue le long de l'interface, il est naturel de choisir une interpolation polynomiale du troisième ordre. L'utilisation de fonctions splines cubiques a été retenue pour cette étude, puisqu'il s'agit bien d'une interpolation du troisième ordre.

On représente la surface par une chaîne de points (r_i, z_i) , à chacun desquels correspondent un potentiel φ_i et une densité de dipôles μ_i . Il s'agit, à partir de cette distribution de points, de trouver une interpolation correcte. Etant donné que la surface n'est pas nécessairement représentable par une fonction de la distance à l'axe de symétrie (Cf. Fig. 5.1), on doit utiliser une interpolation des valeurs de r_i et z_i en fonction d'un paramètre monotone le long de l'interface. De plus, les intégrales 5.16 et 5.17 sont effectuées sur l'abscisse curviligne. Le choix le plus simple consiste donc à prendre pour paramètre la distance cumulée entre les points du maillage, qui est une approximation de l'abscisse curviligne. Appelons s ce paramètre. On a :

$$s_i = \sum_{j=0}^{i-1} \sqrt{(r_{j+1} - r_j)^2 + (z_{j+1} - z_j)^2}$$

Les fonctions splines sont constituées d'un ensemble de polynômes du troisième degré, définis sur chaque segment de telle sorte qu'elles soient de classe C_2

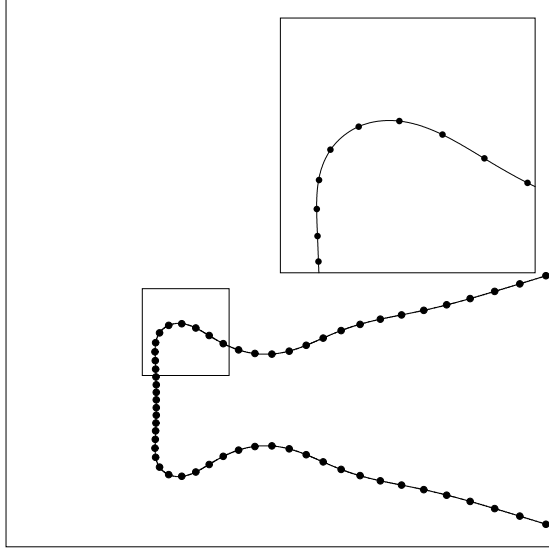


FIG. 5.1.: Interpolation des points de la surface par des fonctions splines cubiques

aux points de jonction des polynômes. Elles sont donc dérivables deux fois en ces points et leur dérivée seconde est continue.

On détermine ces fonctions splines cubiques pour les valeurs r_i , z_i , φ_i et μ_i , pour le paramétrage s choisi précédemment. Notons que ce paramétrage n'est pas le seul possible. Il est préférable, dans certains cas, lorsque les points sont très proches les uns et des autres dans une région de la surface, d'utiliser la fonction continue ξ , affine par morceaux, qui vaut i au point i . Les intégrales rencontrées dans l'équations de Fredholm et pour le calcul de A_θ sont alors effectuées sur $s'(\xi)d\xi$. La quantité $s'(\xi)$ est facile à calculer, puisqu'on a :

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

Les fonctions splines de r et z étant calculées avec ξ comme paramètre, on connaît leur dérivée première par rapport à ξ .

Résolution de l'équation de Fredholm

Le noyau de l'intégrale de Fredholm (5.16), même s'il perd sa singularité grâce à la propriété mathématique utilisée précédemment, varie fortement au voisinage du point de calcul, et notamment lorsque celui-ci se trouve au pôle (sur l'axe de symétrie). On ne peut donc pas calculer les intégrales à l'aide d'une simple règle du trapèze ou de Simpson. La solution employée traditionnellement consiste à intercaler des points de maillage qui serviront uniquement au calcul

des intégrales. En chacun de ces points, interpolés grâce aux splines cubiques, est calculée la valeur exacte du noyau. On peut ensuite utiliser la règle d'intégration du trapèze sur chaque intervalle défini par les nouveaux points.

Pour la résolution de l'équation de Fredholm, deux possibilités s'offrent à nous :

- Discrétiser cette équation et l'écrire sous la forme d'un système matriciel $A_{ij}\mu_j = \varphi_i$
- ou bien faire converger les séries de Neumann en utilisant comme condition initiale des valeurs de μ proches de la solution.

Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé la seconde solution. Les valeurs de μ au pas de temps précédent ont été utilisées comme valeurs initiales. Soient μ_i^n les valeurs de la densité de dipôles à l'itération n . Les valeurs à l'itération $n + 1$ sont obtenues grâce à l'équation 5.16 :

$$\mu^{n+1}(M) = \varphi(M) - \int_s (\mu^n(M) - \mu^n) K_\varphi ds \quad (5.25)$$

Ces séries de Neumann convergent vers la solution, en pratique assez rapidement : environ une dizaine d'itérations suffisent pour approcher la solution à 10^{-6} près. Le critère de convergence que nous avons utilisé ici porte sur la valeur de la norme infinie de la différence des deux vecteurs μ_i^n et μ_i^{n+1} .

5.3.1. Pas de temps adaptatif

L'utilisation d'un pas de temps adaptatif permet de garder un contrôle sur l'erreur effectuée sur la solution. En effet, supposons qu'à l'instant t , le pas de temps ait une valeur τ_0 . A partir de cette valeur, on advecte en temps les points de la surface et le potentiel φ de deux manières différentes : la première pour τ_0 , la seconde pour $\tau_0/2$, deux fois de suite. Si l'on suppose maintenant que la solution obtenue pour $\tau_0/2$ est la solution du problème à l'instant $t + \tau_0$, on peut définir une erreur représentant l'écart entre cette solution et la solution obtenue pour un pas de temps de τ_0 . L'erreur que nous avons choisie est, une fois de plus, la valeur de la norme infinie de la différence des deux distributions de φ . Connaissant cette erreur, on peut alors, par exemple, diviser le pas de temps par 2 si elle est supérieure à une valeur prescrite, le multiplier par 1.5 dans le cas contraire.

Le schéma numérique utilisé ici pour l'avancement en temps de l'équation de Bernoulli et de la condition cinématique est un schéma d'Euler classique.

5.3.2. Lissage de la surface, du potentiel et de la densité de dipôles

Il a été remarqué dans de nombreux articles que les méthodes intégrales présentaient de fortes instabilités à l'échelle de la maille. Ce phénomène est dû, en partie, à l'imprécision de la résolution de l'intégrale de Fredholm. Pour éviter ce problème, de nombreux auteurs ont recours à un lissage de la surface, supprimant

ces longueurs d'ondes de l'ordre de la maille qui n'ont aucune réalité physique. Le principe que nous avons utilisé est assez simple et basé sur la connaissance des fonctions splines pour les points de la surface, φ et μ . Connaissant les coefficients des polynômes sur chaque intervalle, on peut redistribuer les valeurs des coordonnées des points, ainsi que φ et μ à la moitié de chacun de ces intervalles. On obtient alors une nouvelle répartition de ces grandeurs, répartition à partir de laquelle on peut calculer de nouveau les fonctions splines. La deuxième étape consiste à replacer les valeurs une seconde fois à la moitié de chaque nouvel intervalle. On espère ainsi supprimer les instabilités dont la longueur d'onde est comparable à la maille de calcul.

Néanmoins, cette technique de lissage pose un certain nombre de problèmes. En effet, supposons qu'à un instant t donné, la valeur maximale du déplacement des points de l'interface par la condition cinématique soit égale à ε . On ne connaît pas, *a priori* le déplacement de la surface généré par le lissage. Si ce déplacement est supérieur à ε , alors à l'instant t , ce n'est plus le schéma d'advection qui détermine l'évolution de la surface, mais l'algorithme de lissage, ce qui provoque un comportement non physique de la surface libre. Pour cette raison, il est nécessaire d'employer un pas de temps suffisamment petit pour assurer la stabilité de la méthode, mais suffisamment grand pour que le lissage ne prenne pas le contrôle du mouvement.

De même que pour les points de la surface, le potentiel des vitesses φ suit cette règle : si sa variation entre deux pas de temps successifs est plus faible que celle provoquée par le lissage, la validité du comportement ultérieur de la surface n'est plus garanti.

Les tests qui suivent ont été effectués avec un pas de temps fixe pour éviter ces problèmes dus au lissage.

5.4. Tests de convergence de la méthode

Les méthodes intégrales possèdent un certain nombre de paramètres régissant leur précision, à savoir le nombre de points distribués sur la surface, le nombre de points additionnels sur chaque segment pour la résolution des intégrales, le pas de temps, la précision de résolution de l'équation de Fredholm. Nous nous proposons dans cette partie, de faire une étude sommaire de la convergence de notre méthode en fonction de ces paramètres. Le cas que nous utilisons possède une solution analytique ; il s'agit de l'oscillation d'une goutte en apesanteur, initiée par le mode 2 d'oscillations.

Prenons comme condition initiale une goutte de rayon 1 sur la surface de laquelle est initialisé un potentiel des vitesses égal à [3] :

$$\varphi(r, \theta) = Ar^2 P_2(\cos \theta) \quad (5.26)$$

où θ est la colatitude, $r = 1$, $P_2(\cos \theta)$ est le polynôme de Legendre d'ordre deux

et peut s'exprimer sous la forme :

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta + 1) \quad (5.27)$$

Pour A suffisamment petit, on doit observer une oscillation non atténuée (de fait, l'écoulement étant potentiel, on ne doit constater aucune dissipation) et de pulsation [25] :

$$\omega^2 = \frac{8\sigma}{\rho r^3} \quad (5.28)$$

Le temps étant adimensionné par $\sqrt{\rho r^3 / \sigma}$, on doit donc observer une pulsation de :

$$\Omega = 2\sqrt{2} = 2.8284271$$

Différents tests ont donc été effectués sur le nombre de points décrivant la surface, le nombre de points de calcul sur chaque segment, le pas de temps et l'amplitude A de l'initialisation de φ .

Tests sur le nombre de points décrivant la surface

Le premier paramètre numérique influençant la précision de la méthode est, bien-sûr, le nombre de points décrivant la surface. Des tests ont été effectués pour déterminer le nombre de points à partir duquel la simulation pouvait être supposée réaliste. La figure 5.2 représente la masse de la goutte au cours du temps. Cette quantité a été remise à l'échelle de telle sorte qu'elle soit égale à un à l'instant initial.

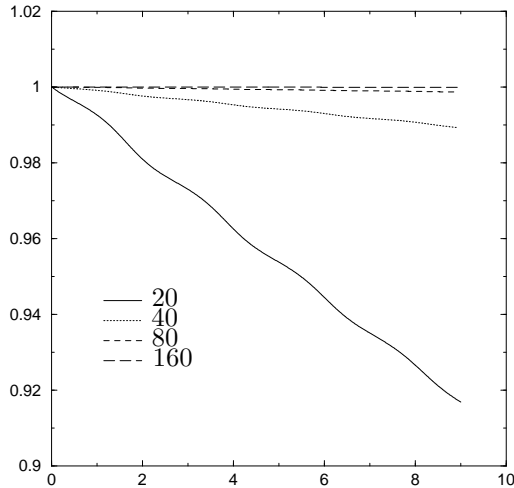


FIG. 5.2.: Masse de la goutte en fonction du temps, pour 20, 40, 80 et 160 points.

Les pas de temps utilisés sont respectivement, dans l'ordre croissant du nombre de points : 0.001, 0.0005, 0.00025 et 0.00025. En effet, un nombre de points plus grand nécessite un pas de temps plus faible pour que le schéma d'advection reste stable. 5 points additionnels sur chaque segment ont été utilisés pour le calcul des intégrales et une amplitude de 0.1 pour le potentiel des vitesses a été choisie.

On peut considérer que 80 points suffisent pour ce type de problèmes, dans la mesure où la masse perdue après quatre périodes d'oscillations n'est que de 0.2%. Les fréquences d'oscillations obtenues sont reportées sur le tableau suivant.

N	ω
20	2.79253
40	2.81284
80	2.81442
160	2.81678

Les valeurs de la pulsation semblent converger vers $2\sqrt{2}$, mais il reste à étudier l'influence du nombre de points de calcul pour les intégrales et de l'amplitude A .

Tests sur le nombre de points de calcul par segment de surface

Une étude sur l'influence du nombre de points de maillage ne suffit pas à rendre compte de la convergence d'une méthode intégrale. En effet, comme il a été remarqué précédemment, les noyaux des intégrales varient fortement entre deux points de la surface et particulièrement à proximité des pôles. Il est donc nécessaire d'ajouter des points sur chaque segment pour le calcul des intégrales. Le nombre de ces points par segment conditionne ainsi la précision avec laquelle les intégrales sont calculées et, en conséquence, la précision de la méthode.

Pour un pas de temps de 0.00025 et 81 points, des calculs ont été effectués pour un nombre de points par segment variant de 0 à 6. L'amplitude A est toujours égale à 0.1.

La fréquence des oscillations change de manière notable en fonction du nombre de ces points. Le tableau 5.1 représente les valeurs de la pulsation pour chacun de ces calculs.

N	0	1	2	3	4	5	6
ω	2.78017	2.80187	2.81127	2.81442	2.81757	2.81757	2.81757

TAB. 5.1.: Pulsation en fonction du nombre de points de calcul par segment.

A partir de 4 points, la pulsation ne change plus, mais reste inférieure à $2\sqrt{2}$.

D'autres tests ont montré que le pas de temps – et donc le lissage, puisque celui-ci est effectué à chaque pas de temps – avait une influence sur les oscillations. Pour un pas de temps inférieur ou égal à 0.0005, 81 points, 5 points de calcul par segment, la pulsation est égale à 2.81757.

Tests sur l'amplitude des oscillations

Un dernier test capital a consisté à faire varier l'amplitude imposée sur la condition initiale du potentiel des vitesses. La figure 5.3 représente les oscillations du point supérieur de la goutte se trouvant sur l'axe de symétrie, en fonction de A . Le pas de temps est égal à 0.00025, le lissage s'opère à chaque pas de temps, 5 points de calculs additionnels sur chaque segment sont utilisés et 81 points décrivent la surface.

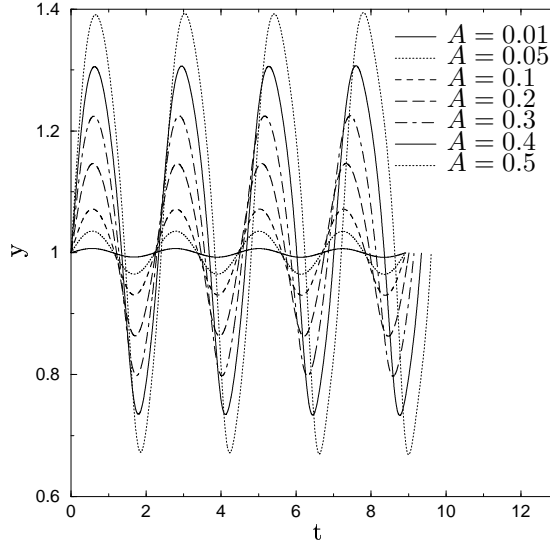


FIG. 5.3.: Oscillations de la goutte en fonction de A

La fréquence des oscillations augmente lorsque A diminue ; cette fréquence doit converger vers $2\sqrt{2}$, comme le prévoit l'étude aux petites perturbations. En effet, on constate qu'une bonne approximation (à 10^{-2} près) est obtenue pour $A = 0.05$ ou $A = 0.01$. Néanmoins, la monotonie de la courbe n'est vérifiée que jusqu'à $A = 0.05$ (Cf. Fig. 5.4).

Discussion

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de cette étude de convergence. La pulsation obtenue pour $A = 0.05$ approche la solution à 10^{-2} près, mais la valeur obtenue pour $A = 0.01$ est moins bonne. Ce problème doit certainement être attribué au lissage, dont l'influence est difficile à quantifier. Plus l'amplitude des oscillations est faible, plus on court le risque de donner au lissage une grande importance relativement au schéma d'advection. L'idée selon laquelle on pourrait employer ce lissage moins souvent, c'est-à-dire par exemple, tous les

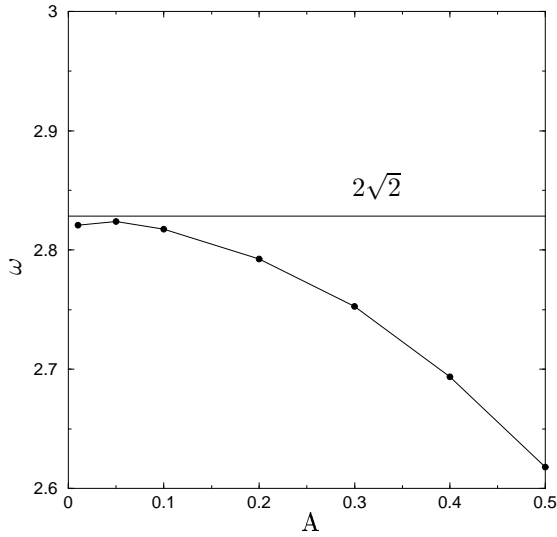


FIG. 5.4.: Pulsation de la goutte en fonction de A

dix pas de temps, ne semble pas appropriée puisqu'en faisant cela, on introduit des chocs dans la résolution des équations. L'objectif est de conserver un algorithme le plus continu possible, dans lequel doit s'inscrire le lissage. Il serait donc probablement intéressant d'essayer de pondérer le lissage par un coefficient dépendant du déplacement moyen des points du maillage. Une autre idée, plus simple, consisterait à utiliser non plus le schéma d'Euler mais un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. L'erreur produite par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 est de l'ordre de δt^5 , tandis que celle produite par un schéma d'Euler est d'ordre δt^2 . On doit donc pouvoir utiliser, avec un schéma de Runge-Kutta, un pas de temps plus grand sans altérer la précision et la stabilité de la méthode. En théorie, si δt_E est le pas de temps utilisé pour le schéma d'Euler, on doit pouvoir choisir un pas de temps de $\delta t_E^{2/5}$ pour obtenir une erreur comparable avec le schéma de Runge-Kutta. En outre, l'utilisation d'un pas de temps plus grand permet de donner au lissage une importance moindre par rapport au schéma d'advection. On constate, en effet, que cette technique donne un meilleur résultat pour $A = 0.01$, en prenant un pas de temps de 0.0025. On obtient $\omega = 2.8239$, valeur égale à celle obtenue avec le schéma d'Euler pour $A = 0.05$. La précision obtenue (10^{-2}) est à attribuer au moyen de calcul de la pulsation. Ne faisant le calcul que sur dix oscillations de la goutte, on ne peut pas obtenir un résultat avec une plus grande précision. La solution serait de faire un développement en série de Fourier du signal sur une centaine de périodes ; seule la précision de la méthode interviendrait alors dans le calcul de la pulsation. Ceci n'est en pratique pas réalisable, à cause de l'accumulation des erreurs d'arrondis.

5.5. Impact d'une goutte sur une surface hydrophobe

La méthode intégrale décrite précédemment peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes, pourvu que la surface considérée soit fermée et que la physique puisse être décrite par une formulation potentielle. C'est le cas de l'impact d'une goutte (d'eau, par exemple) sur une surface hydrophobe. Les surfaces hydrophobes sont un sujet de recherche industrielle, notamment dans le domaine de l'automobile. La conception de pare-brises hydrophobes présente par exemple un grand intérêt. Plus généralement, de nombreuses applications sont envisageables pour les surfaces ou textiles hydrophobes, ne s'altérant pas au contact des liquides.

Des expériences ont été effectuées par Denis Richard et David Quéré sur différentes surfaces, dont certaines traitées spécialement pour avoir un haut pouvoir hydrophobique [4, 42]. De tels matériaux sont fabriqués en créant de petites rugosités (de l'ordre du micron) sur leur surface. On réduit ainsi l'angle de contact entre la goutte et le solide (Cf. 5.5).

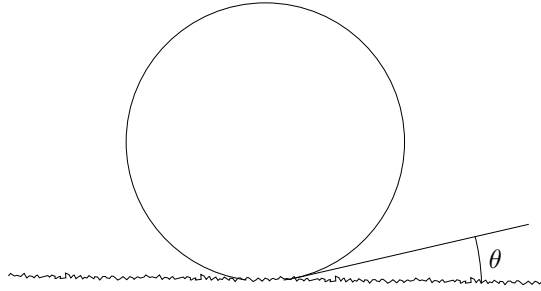


FIG. 5.5.: Schéma d'une goutte posée sur une surface hydrophobe. L'angle de contact θ est proche de zéro ($\theta < 10^\circ$).

Les simulations effectuées sur ce problème avec la méthode intégrale ont nécessité une définition, en termes numériques, de la surface hydrophobe. On ne peut pas, avec ces méthodes, imposer une valeur nulle à la vitesse sur la zone d'impact.

La manière la plus physique de prendre en compte la surface hydrophobe est de la matérialiser par une force qui lui est perpendiculaire et exponentiellement décroissante lorsqu'on s'en éloigne (Cf. 5.6) :

$$\mathbf{f}(z) = 10000 e^{-1000 z} \mathbf{e}_z \quad (5.29)$$

Pour le calcul, on a ajouté le potentiel φ_f de cette force à l'équation de Bernoulli :

$$\mathbf{f}(z) = \nabla \varphi_f \Rightarrow \varphi_f = -10 e^{-1000 z}$$

Le terme source φ_f est donc égal à -10 sur la surface hydrophobe et décroît très rapidement vers zéro lorsqu'on s'en éloigne. Par exemple, pour $z = 0.01$ (1% du rayon de la goutte si on a choisi ce dernier égal à 1), le potentiel est égal à $\varphi_f = -10 e^{-10} = -4.54 e^{-4}$. L'influence de cette force sur le mouvement de la goutte est donc limité à une région très proche de la surface hydrophobe. Cette formulation présente néanmoins un inconvénient : l'effet ventouse de la surface de la goutte en contact avec le plan ne peut pas être pris en compte. La chaîne de marqueurs en contact avec le plan peut en effet se décoller de celui-ci et c'est effectivement ce que l'on observe. Cependant, l'amplitude de ce décollement est négligeable par rapport aux déformations de la goutte lors de l'impact.

Notons qu'avec cette technique, on évite le problème difficile de l'angle de contact des trois interfaces (liquide-gaz, gaz-solide, solide-liquide). Cet angle θ est égal à zéro dans nos simulations. En outre, on autorise les particules fluides de la zone de contact à avoir une vitesse tangentielle à celle-ci.

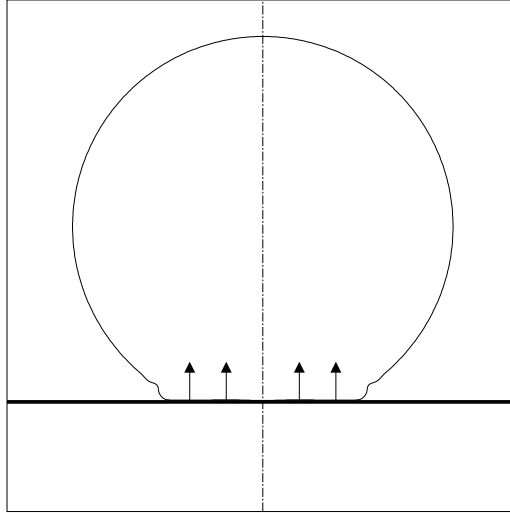


FIG. 5.6.: Schéma de l'Impact d'une goutte sur une surface hydrophobe. La surface est représentée par une force verticale dirigée vers le haut et décroissant exponentiellement avec z .

Nombre sans dimension

Pour réaliser ces simulations, nous avons décidé de ne pas tenir compte de la gravité. La condition dynamique résolue est donc la suivante :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \kappa \quad (5.30)$$

Aucun nombre sans dimension n'intervient dans cette équation. Le problème en contient pourtant un, construit à partir de la vitesse d'impact, le nombre de Weber :

$$We = \rho R V^2 / \sigma$$

où ρ est la masse volumique du liquide, R le rayon de la goutte, σ la coefficient de tension de surface liquide-gaz et V la vitesse d'impact. Le rayon de la goutte utilisé pour le calcul est de 1, σ/ρ est égal à 1, donc le nombre de Weber est égal à V_n^2 , où V_n est la vitesse d'impact numérique.

Si on initialise les calculs avec une vitesse d'impact V_n , on peut retrouver la vitesse d'impact physique correspondant à une masse volume, une tension de surface et un rayon réels, par :

$$V = V_n \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$$

Pour initialiser la vitesse d'impact, on débute le calcul avec un potentiel des vitesses uniforme sur la surface de la goutte et égal à $\varphi_i = -\alpha z$, ce qui correspond à une vitesse de :

$$\mathbf{V}_n = -\alpha \mathbf{e}_z$$

Simulation numérique

Une simulation a été effectuée en utilisant les mêmes paramètres que ceux de l'expérience décrite par Denis Richard, à savoir la masse volumique et la tension de surface de l'eau, une vitesse d'impact de 41 cm s^{-1} , soit une vitesse numérique sans dimension de 2.02. La figure 5.7 représente les profils expérimentaux obtenus avec une caméra rapide. Les intervalles de temps entre les images sont respectivement de 2.7, 1.8, 0.4, 1, 0.2, 0.2, 0.4, 0.4 et 0.9 ms . On distingue clairement sur ces photos les ondes capillaires évoluant sur la surface de la goutte. Le jet vertical semble être issue de la convergence de ces ondes au sommet de la goutte. Avant l'impact, la goutte n'est pas sphérique, mais plus proche du mode 2 des harmoniques sphériques. Ne connaissant pas la dynamique de la goutte à l'instant initial, nous avons effectué le calcul avec une sphère pour condition initiale.

La figure 5.9 représente les profils numériques successifs, séparés de $5 \cdot 10^{-2}$ en temps adimensionné. Le temps caractéristique utilisé pour supprimer les dimensions de l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\tau = \sqrt{\rho R^3 / \sigma}$$

A $5 \cdot 10^{-2}$ correspond donc le temps physique :

$$t = 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{\rho R^3 / \sigma} = 0.43 \text{ ms}$$

pour une goutte d'eau de rayon 1.75 mm .

201 points ont été utilisés pour décrire la surface de la goutte, la durée du calcul est inférieure à une heure. Les ondes capillaires sur la surface de la goutte

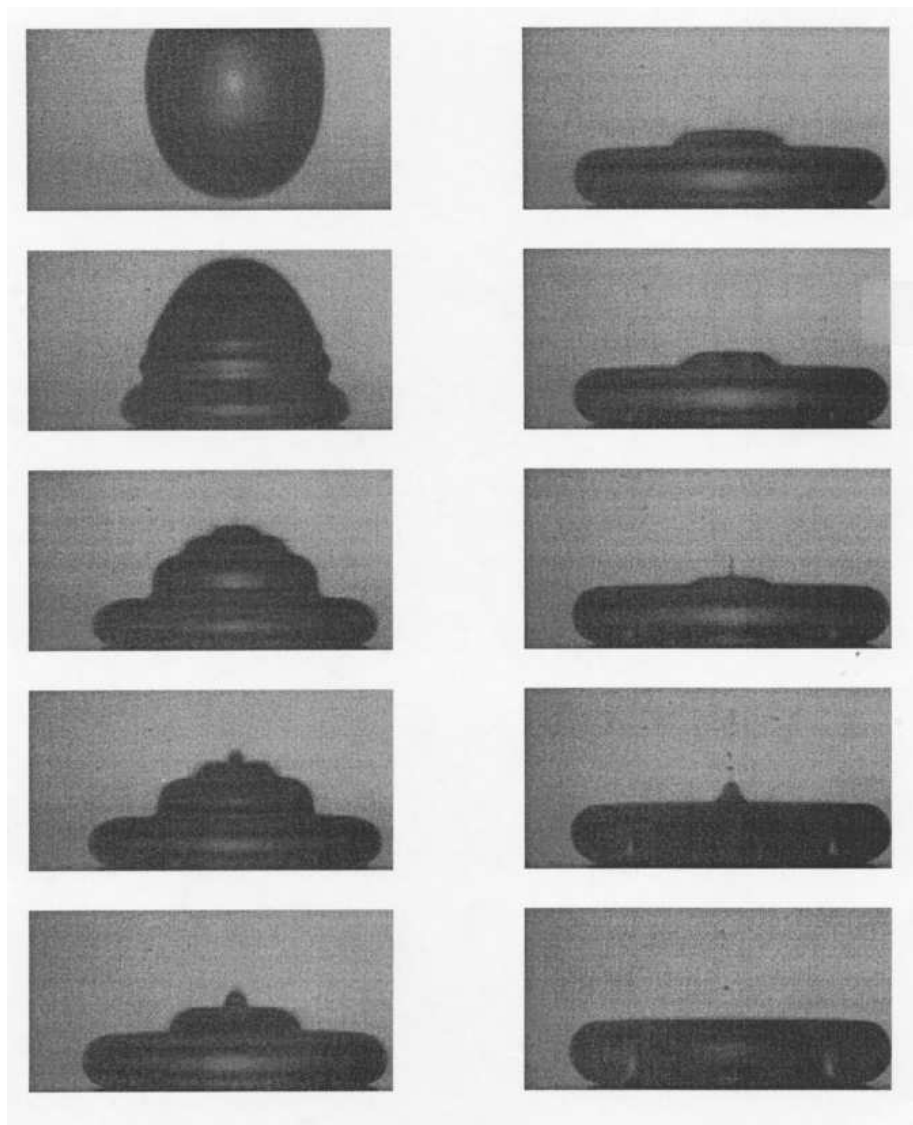


FIG. 5.7.: *Impact d'une goutte d'eau sur une surface hydrophobe (D. Richard (2000)). La vitesse d'impact est de 41 cm s^{-1} , le rayon de la goutte de 1.75 mm .*

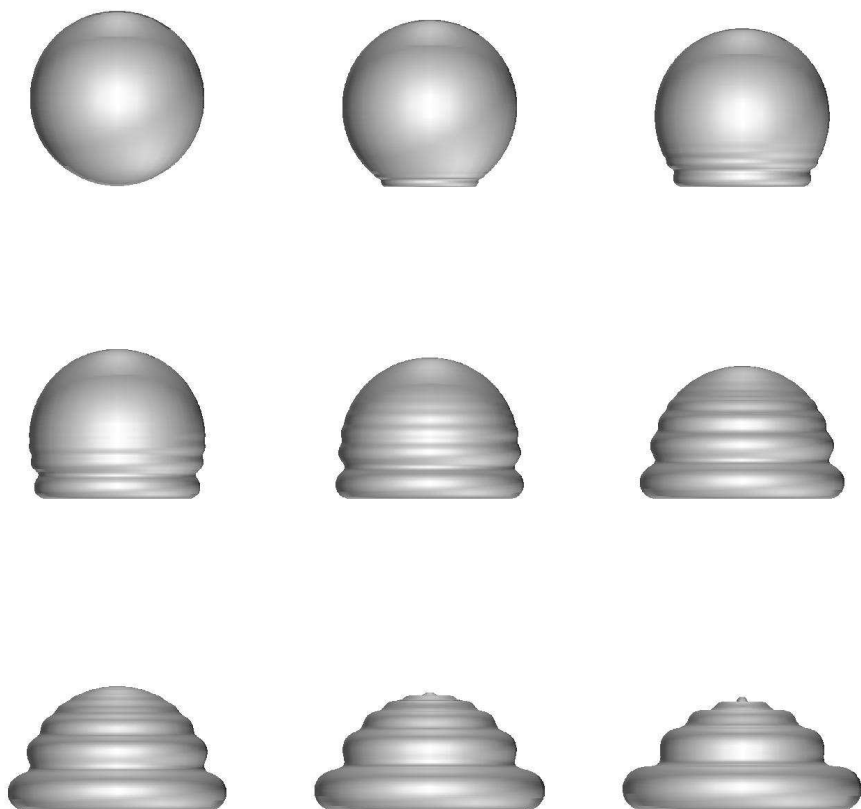


FIG. 5.8.: *Impact d'une goutte sur une surface hydrophobe. Images de synthèse réalisées à partir des profils successifs. Les intervalles de temps sont les mêmes que pour la figure 5.9.*

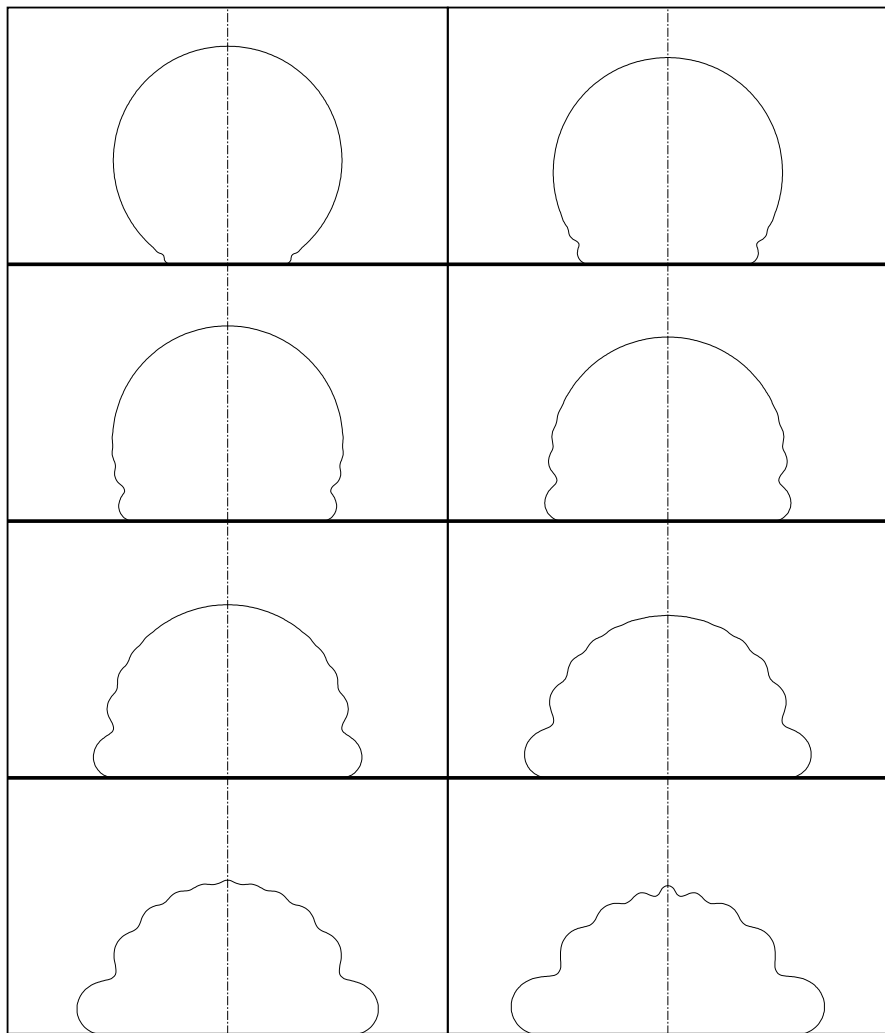


FIG. 5.9.: *Impact d'une goutte sur une surface hydrophobe : profils numériques successifs. Ces profils sont séparés de $5 \cdot 10^{-2}$ en temps adimensionné, soit 0.43 ms pour une goutte d'eau de rayon 1.75 mm.*

sont effectivement bien décrites et l'on peut observer la naissance d'un jet vertical rapide en fin de calcul (Cf. 5.10).

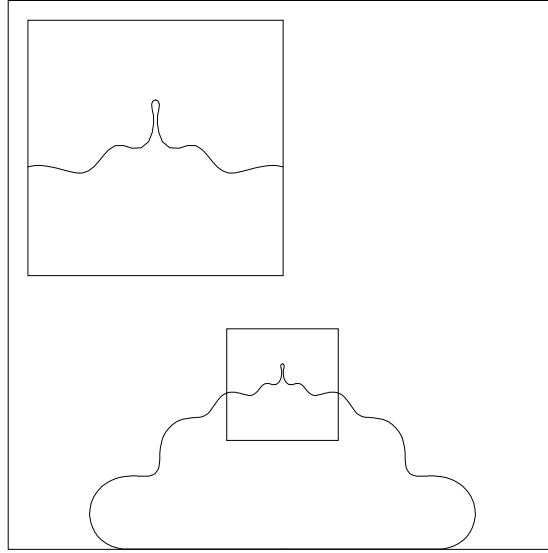


FIG. 5.10.: *Jet vertical formé par la convergence des ondes capillaires au sommet de la goutte.*

Il resterait à étudier l'éventuelle existence d'une singularité de courbure au sommet de la goutte. Les profils expérimentaux montrent, en effet, que ce jet est fin et très énergétique, caractéristiques déjà rencontrées dans l'étude de l'éclatement de la bulle.

Si l'on diminue de manière conséquente la vitesse d'impact, les ondes capillaires à la surface de la goutte ont des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes. La figure 5.11 représente l'impact d'une goutte pour une vitesse sans dimension de 0.5, c'est-à-dire à peu près le quart de celle de la simulation précédente. La courbe restant connectée, on peut mener le calcul jusqu'au rebond de la goutte.

5.6. Conclusions

Dans ce chapitre, une méthode intégrale a été décrite, puis validée par une étude sur le mode 2 d'oscillations d'une goutte en apesanteur. Cette formulation s'applique aux écoulements potentiels, c'est-à-dire soit pour des fluides très peu visqueux, soit pour les instants courts de phénomènes interfaciaux. Son application à l'impact d'une goutte sur une surface hydrophobe donne de très bons résultats, en accord avec l'expérience.

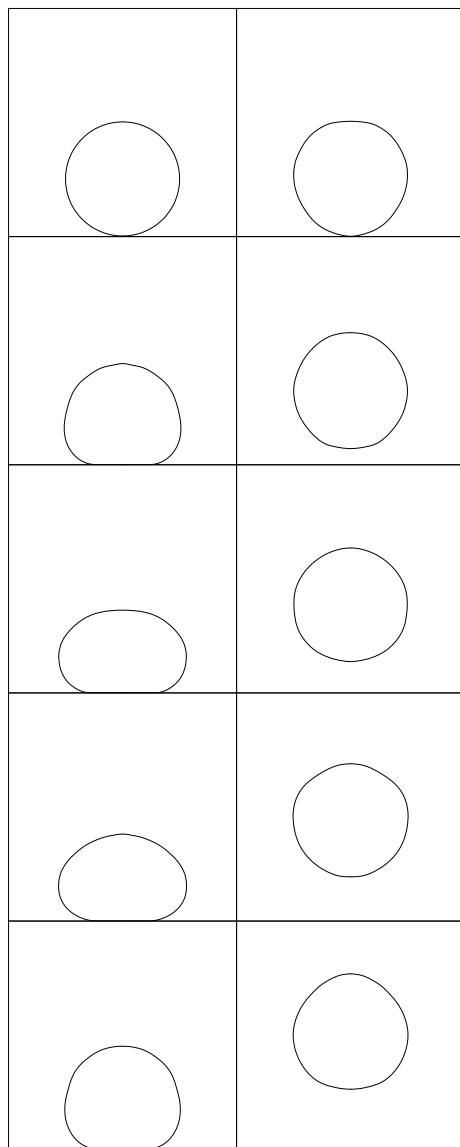


FIG. 5.11.: De haut en bas et de gauche à droite : *impact lent*, pour une vitesse sans dimension de 0.5, soit 10 cm s^{-1} pour une goutte d'eau de rayon 1.75 mm .

Telle qu'elle est écrite, la théorie formant la base de cette méthode ne s'applique qu'aux surfaces fermées, le liquide dynamiquement actif se trouvant à l'intérieur. Il serait intéressant et utile de généraliser cette formulation aux surfaces ouvertes. Ceci permettrait d'étudier, par exemple, le comportement d'ondes de Faraday à la surface d'un liquide. Il est toutefois possible, moyennant des modifications, de faire ce type de calculs avec la méthode, telle qu'elle est décrite ici. On peut ajouter à la surface libre, les bords du récipient, ainsi que le fond, et écrire les équations intégrales pour la surface fermée, union de ces trois surfaces. Ces modifications restent à faire et devraient permettre d'étudier plus précisément la singularité de courbure rencontrée dans la première partie.

6. Coalescence de deux gouttes en apesanteur

La coalescence de gouttes sphériques est un phénomène commun, puisqu'il est responsable de la formation des gouttes de pluie dans les nuages. C'est, en outre, un phénomène qui a suscité récemment un vif intérêt de la part des physiciens et mécaniciens des fluides. Les changements topologiques des interfaces sont communément traités, avec l'outil numérique, sans tenir compte de la physique locale de la rupture. La raison en est simple : les dimensions spatiales, à l'approche de la rupture ou de la coalescence, atteignent des valeurs arbitrairement petites ¹. La plupart des méthodes numériques ne permet pas de traiter à la fois toutes les échelles spatiales d'un problème où il apparaît des changements topologiques. Citons, pour exemple, la simulation de l'atomisation de jets à haute pression dans les moteurs diesels. Lors de l'atomisation, un grand nombre de gouttes est produit et à chaque goutte correspond un changement topologique de l'interface. Il serait vain de vouloir simuler de manière globale l'atomisation et de manière précise, localement, chaque séparation ou coalescence de gouttes. Les changements topologiques sont alors traités naturellement (avec la méthode V.O.F. [24, 19]), lorsque les dimensions du jet ou du film atteignent la taille de la maille. On peut, néanmoins, imaginer incorporer un modèle prenant en compte la physique de la rupture. C'est pour cette raison qu'il est important de comprendre la dynamique locale de la rupture ou de la coalescence.

De nombreux auteurs se sont intéressés à la description de ces problèmes. Des approches théoriques, numériques et expérimentales ont donné de très intéressantes conclusions sur la rupture des jets liquides [12, 16, 13, 14] ou sur la coalescence de gouttes en approximation d'écoulement de Stokes [17, 15]. A notre connaissance, aucune étude numérique en approximation potentielle n'a été effectuée. C'est ce que nous proposons dans ce chapitre, en utilisant la méthode intégrale décrite précédemment.

6.1. Comparaison avec l'expérience

Des expériences ont été menées en présence de gravité pour étudier la coalescence de deux gouttes de mercure [32]. Les auteurs supposent, étant donné le

¹dépassant la limite de l'approximation des milieux continus

coefficient de tension de surface très élevé du mercure (0.435 kg.s^{-2}) que la gravité déforme peu les gouttes de petite taille. Ces expériences ont donc été effectuées sur des gouttes de 1 g. Dans ces conditions expérimentales, le phénomène peut être assimilé à la coalescence de ces deux mêmes gouttes en apesanteur, c'est-à-dire qu'il reste à symétrie axiale. Les gouttes sont posées sur une surface à haut pouvoir hydrophobe, ce qui rend la forme des gouttes encore plus proche de la sphère.

La difficulté d'un tel problème réside en premier lieu dans la condition initiale à adopter. En effet, avec la méthode d'intégrales de frontières utilisée ici, on ne peut initialiser le calcul qu'avec deux gouttes connectées entre elles. Plus le pont reliant les deux gouttes sera de petit rayon, plus la simulation se rapprochera des conditions expérimentales initiales. Les méthodes d'intégrales de frontières autorisent une certaine liberté sur la distribution, ou redistribution, des points du maillage. On peut donc raffiner à souhaits le maillage aux endroits où la courbure est grande ; c'est le cas du problème considéré.

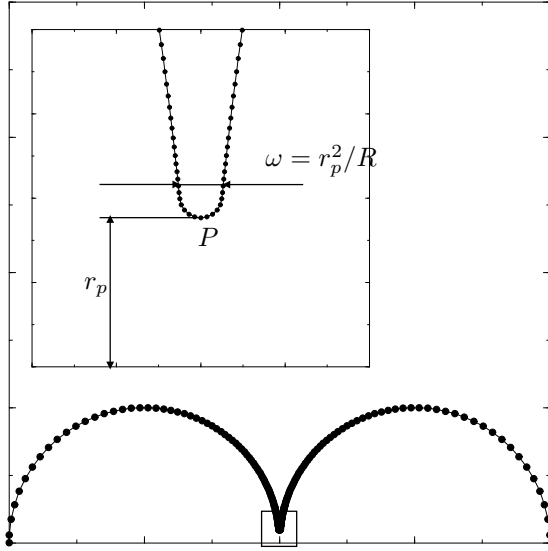


FIG. 6.1.: Condition initiale statique pour le calcul de la coalescence de deux gouttes

Prenons comme condition initiale statique deux sphères tangentes, reliées entre elles par un pont de liquide. Si l'on prend comme référence le rayon des gouttes R , des considérations géométriques simples montrent que le rayon de courbure de ce pont est égal à $\omega/2 = r_p^2/2R$, où r_p est la distance du point P à l'axe de symétrie (Cf. fig 6.1).

Les simulations présentées ensuite ont été effectuées avec une condition initiale telle que $r_p = 0.1R$. Pour résoudre toutes les échelles du problème, un

maillage non uniforme à été utilisé. L'utilisation d'une condition initiale pour laquelle on aurait $r_p \ll 0.1R$ pose des problèmes numériques et la formulation détaillée au chapitre précédent n'est plus valable. Ces problèmes sont directement liés à l'interpolation des points de la surface à l'aide de fonctions splines et seront discutés en conclusion de cette partie.

La figure 6.2 représente les profils numériques successifs superposés aux photographies de l'article de Menchaca et *al.*. Les images sont séparées de 3.5 ms . On constate un très bon accord entre les résultats expérimentaux et les profils de la simulation numérique, ce qui prouve que la dissipation visqueuse peut être négligée pour ce type de problème. La figure 6.3, quant à elle, représente des images de synthèse réalisées à partir des profils de la surface libre.

Une étude numérique effectuée par Stéphane Popinet est présentée dans l'article de Menchaca et *al.*. Les équations de Navier-Stokes sont résolues. Les auteurs constatent une différence notable entre les profils numériques et expérimentaux après la convergence des ondes capillaires au sommet des gouttes. Ce problème apparaît également dans nos simulations et provient sans doute de la dissipation d'énergie provoquée par ces ondes capillaires. Cette dissipation est, bien entendu, exclue de nos simulations, puisque l'on néglige les effets visqueux. En outre, l'expérience a montré que de très petites gouttes pouvaient se détacher au sommet des gouttes, phénomène qui participe aussi à la dissipation d'énergie.

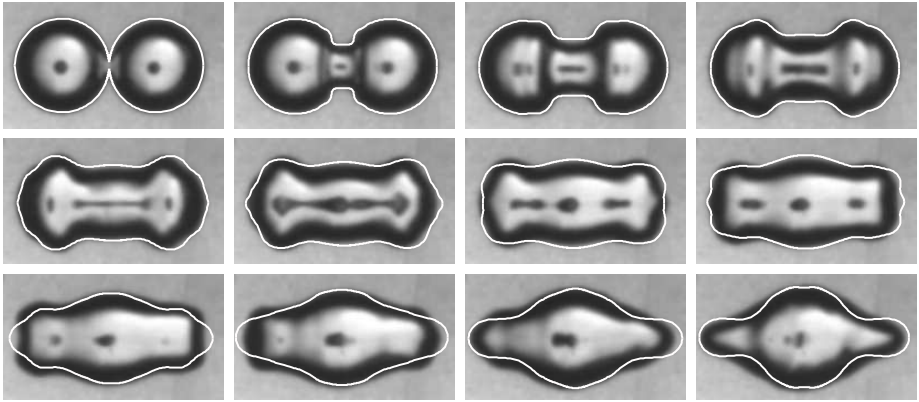


FIG. 6.2.: *Fusion de deux gouttes de mercure : comparaison entre simulation numérique et expérience.*

Ces résultats qualitatifs ne rendent compte que partiellement du phénomène de coalescence. Il est plus important de comprendre le mécanisme de la coalescence aux instants courts. L'objectif de cette étude numérique est donc, plus que de valider le code numérique, de se rapprocher le plus possible de l'instant du contact des deux gouttes.

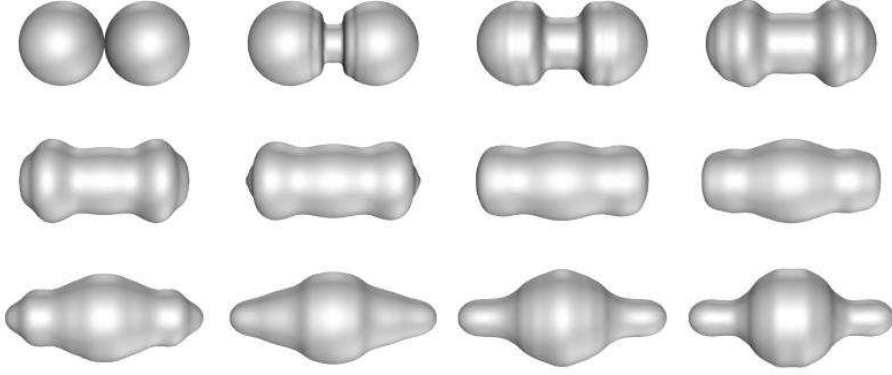


FIG. 6.3.: *Fusion de deux gouttes de mercure. Images de synthèse réalisées à partir des profils numériques.*

6.2. Etude aux instants courts

On peut prédire de manière très simple, le comportement aux instant courts de la distance du point P à l'axe de symétrie. Si le point P , à l'instant initial, est suffisamment proche de l'axe de symétrie, étant donné que $\omega/2 = r_p^2/2R$ et que la courbure se décompose en une courbure plane (supposée proportionnelle à ω) et un terme proportionnel à r_p , on peut supposer ($r_p \ll r_p^2$) que le problème est identique, aux instants courts, au problème plan associé (deux cylindres tangents).

Si $t \ll 1$, on peut supposer, comme pour l'étude de l'effondrement d'une bulle à la surface, que les différentes grandeurs de l'écoulement se comportent comme des puissances du temps :

$$\varphi \sim t^\alpha \quad r \sim t^\beta$$

Dans ces conditions, pour que le terme d'accumulation $\partial\varphi/\partial t$ de l'équation de Bernoulli soit du même ordre de grandeur que la terme de convection $(\nabla\varphi)^2/2$, on doit vérifier :

$$\alpha - 2\beta = -1$$

Pour que le terme de tension de surface, se comportant comme r_p^{-2} soit du même ordre de grandeur que le terme de convection, on doit également s'assurer que :

$$\alpha + 2\beta = 1$$

Ce système d'équation ne possède qu'une solution :

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{2}$$

La distance du point P à l'axe de symétrie doit donc, si l'on suppose le problème plan, se comporter comme [17] :

$$r_p \sim t^{1/2} \quad (6.1)$$

A cette théorie simple s'oppose le même raisonnement que pour l'effondrement d'une bulle à la surface libre. Si l'on décide de ne pas négliger le terme axi-symétrique de la tension de surface, on aboutit, après avoir équilibré les différents termes de l'équation de Bernoulli, aux mêmes lois d'échelles que pour le problème de la bulle, à savoir :

$$r_p \sim t^{2/3} \quad (6.2)$$

Le fait de supposer ou non que ω reste de l'ordre de r_p^2 oppose ces deux théories. Il est donc nécessaire de confirmer, grâce au calcul numérique, l'une ou l'autre de ces hypothèses.

6.2.1. Résultats numériques pour $r_p = 0.1R$

On peut, dans un premier temps, examiner les résultats obtenus pour $r_p = 0.1R$, pour lesquels aucune modification majeure n'a été effectuée sur le code numérique. La figure 6.4 représente les profils de la surface libre pour les premiers instants de la coalescence, séparés de 0.23 ms .

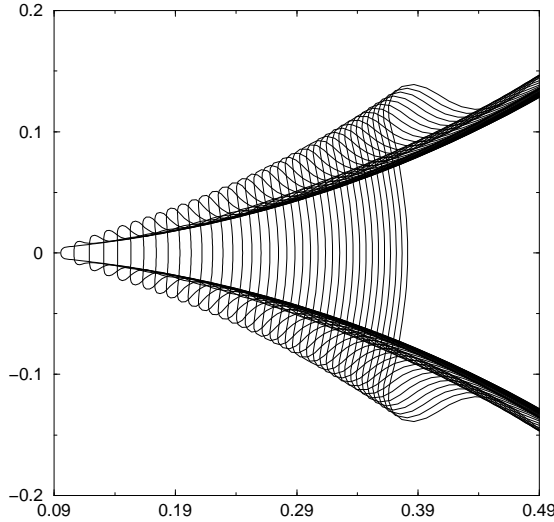


FIG. 6.4.: Evolution de la surface libre pour $r_p \simeq 0.1R$. Les profils sont séparés de 0.23 ms .

Après un régime transitoire, l'évolution du rayon du pont reliant les deux gouttes est bien approximé par la loi en $t^{1/2}$ 6.5.

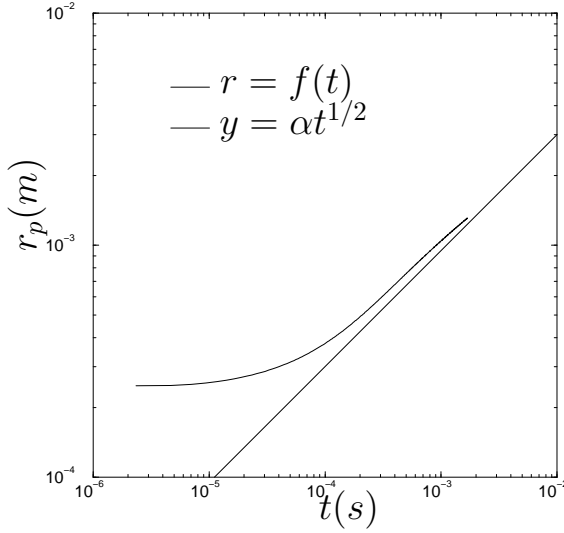


FIG. 6.5.: *Evolution temporelle de la coordonnée radiale du point sur l'axe de symétrie des deux gouttes (point P sur la figure 6.1).*

On dispose pourtant de moins d'une décade concernant la valeur de r_p . C'est pourquoi il est important d'effectuer des simulations pour $r_p \ll 0.1$, ce qui nécessite quelques modifications de la méthode numérique.

6.2.2. Simulations pour $r_p = 0.01R$

Comme il a été remarqué, le problème comprend deux échelles très différentes :

- le rayon R des gouttes, pris égal à 1 pour les simulations,
- le rayon de courbure du pont liquide reliant les deux gouttes, égal à $r_p^2/2R$.

Il faut donc, si l'on veut résoudre le problème pour $r_p \ll 1$, utiliser un maillage très fin à proximité du pont liquide, et plus grossier loin de ce pont. Le coût numérique d'une simulation avec un maillage régulier est déjà énorme pour $r_p = 0.01R$. En effet, si l'on suppose avoir besoin d'au moins 10 segments de calcul au niveau du pont pour résoudre les équations correctement, il faudrait environ 2.10^5 marqueurs sur le reste de l'interface, ce qui n'est pas réalisable avec les moyens de calculs actuels. Un maillage adapté à la géométrie du problème s'impose donc.

Néanmoins, il n'est pas possible de distribuer les points arbitrairement, sans être confronté à certains problèmes liés au calcul des fonctions splines. Si, numériquement, la multiplication est très précise, l'addition l'est beaucoup moins.

Soient a et b tels que $|b - a| \ll |b|$. Alors, l'opération :

$$\frac{a}{b}a$$

est très précise, tandis que

$$(b - a) + a$$

donne b avec une précision relative comparable à la précision machine, qui est proche de 10^{-30} en double précision. Ce manque de précision handicape l'opération de lissage de la surface lorsque les distances entre les points sont très différentes le long de l'interface. Pour lisser les points de la surface et le potentiel φ , on doit évaluer les polynômes d'ordre trois au centre de chaque segment défini par l'abscisse curviligne :

$$s_{i+1/2} = (s_i + s_{i+1})/2$$

Etant donnée la très petite taille du segment $[s_i, s_{i+1}]$ relativement à la valeur de s_i , l'erreur commise sur l'abscisse curviligne du milieu se répercute de manière importante sur l'évaluation du polynôme en ce point. On constate effectivement que les fonctions splines calculées de cette façon donnent des résultats très imprécis (Cf. Fig. 6.6).

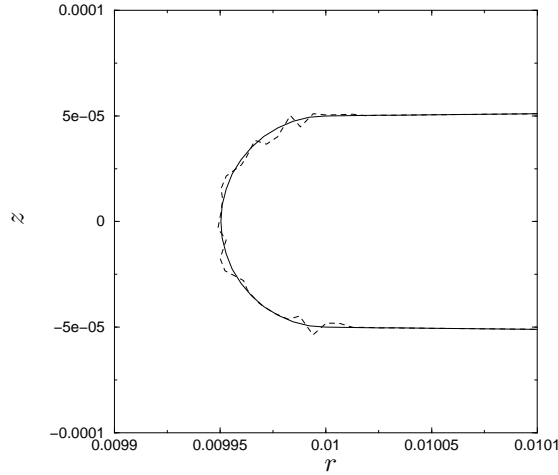


FIG. 6.6.: Points initiaux au niveau du pont entre les deux gouttes (trait continu), superposés à des points calculés à partir des fonctions splines (pointillés). L'imprécision des splines vient du fait qu'on ne peut pas s'assurer que l'abscisse curviligne $(s_i + s_{i+1})/2$ correspond au milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$.

On doit donc changer la description de l'interface. Une deuxième version du code de calcul a été développée : les fonctions splines sont calculées avec un

paramétrage différent. Le paramètre χ choisi est une fonction de l'abscisse curviligne, affine par morceaux, égale à i au point (x_i, y_i) . Cette formulation nécessite d'écrire différemment les intégrales rencontrées dans l'équation de Fredholm et le calcul du potentiel des vitesses A :

$$\varphi(M) = \mu(M) + \int_s (\mu(M) - \mu) K_\varphi \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (6.3)$$

$$A_\theta(M) = - \int_s (\mu(M) - \mu) K_A \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (6.4)$$

Connaissant les fonctions splines des coordonnées des points de la surface, on peut déterminer $ds/d\chi$ grâce à :

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\frac{dx^2}{d\chi} + \frac{dy^2}{d\chi}}$$

La valeur de $(\chi_i + \chi_{i+1})/2$ ne correspond pas au milieu du segment $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$; en revanche, l'évaluation du polynôme en ce point est bien plus précise. Cette propriété permet d'éviter les instabilités rencontrées avec l'abscisse curviligne (Cf. Fig. 6.7).

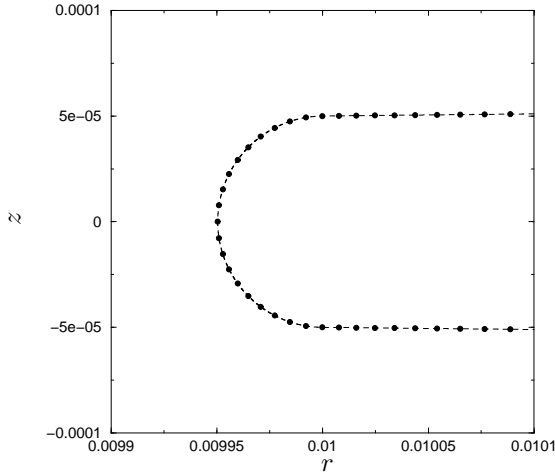


FIG. 6.7.: *Points initiaux au niveau du pont entre les deux gouttes (trait continu), superposés à des points calculés à partir des fonctions splines (pointillés) en utilisant le paramétrage χ .*

Des calculs ont donc été effectués pour $r_p = 0.01R$ avec ce nouveau paramétrage. La méthode manque encore de stabilité pour ce genre de problème, ce qui peut être attribué à l'imprécision sur le calcul des intégrales. La figure 6.8 représente quelques profils obtenus. L'évolution de la surface ressemble beaucoup aux

résultats numériques obtenus par Oguz et Prosperetti [33]. Leur formulation est moins générale que la nôtre, puisque leur domaine de calcul est limité à la zone occupée par le bourrelet. L'objectif de notre étude est d'étudier le développement du bourrelet sur plusieurs décades.

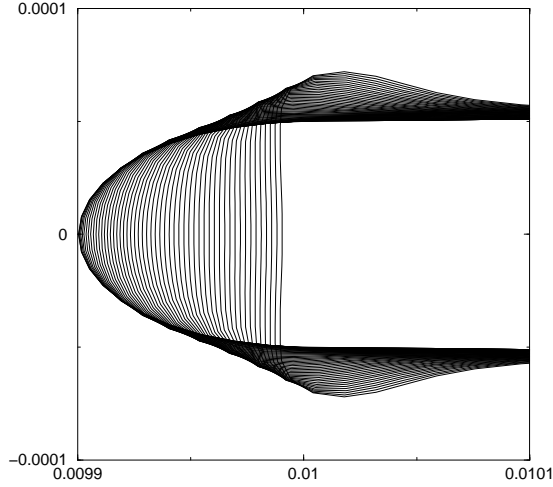


FIG. 6.8.: *Profils successifs de la surface libre au point de jonction des des gouttes.*

Cette nouvelle formulation devrait permettre de traiter des rapports d'échelles bien supérieurs à 10^4 . Le problème majeur rencontré lors de nos simulations est lié au lissage qui, loin du point de jonction des deux gouttes, déforme très sensiblement la surface.

Conclusions

Dans cette seconde partie, une méthode intégrale a été décrite, qui permet de résoudre des écoulements potentiels en présence d'une surface libre. Telle qu'elle est écrite, cette formulation s'applique à des surfaces fermées. Il est possible de modéliser l'impact d'une goutte sur une surface hydrophobe, moyennant l'introduction dans l'équation de Bernoulli, d'une force représentant le solide. De plus, cette méthode autorise une certaine liberté dans la manière de distribuer les points sur la surface. Une distribution non uniforme permet alors d'étudier, par exemple, la coalescence de deux gouttes en apesanteur, phénomène présentant deux échelles spatiales très différentes.

Des améliorations importantes peuvent être apportées à la méthode, ouvrant ainsi des perspectives sur deux études :

- L'adaptation de la méthode aux problèmes pour lesquels la surface est ouverte (surface plane au repos à l'infini) devrait permettre d'étudier certaines singularités aux interfaces, en écoulement potentiels. Deux possibilités s'offrent à nous : soit reformuler la méthode intégrale pour un liquide au repos à l'infini, soit inclure dans les intégrales la contribution des bords et du fond d'un récipient (cylindrique). La seconde possibilité semble plus intéressante puisqu'elle permet, notamment, l'étude de l'impact d'une goutte sur une film mince.
- La généralisation du raffinement local ébauchée à la fin du chapitre précédent. En reformulant les interpolations de manière locale, et non plus globale comme les fonctions splines l'impliquent, on devrait pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir des échelles spatiales radicalement différentes.

Bien souvent, les écoulements potentiels recèlent des richesses théoriques auxquelles les équations de Navier-Stokes ne donnent pas accès. Le fait même qu'ils soient entièrement déterminés par la connaissance d'une fonction sur leur enveloppe en est une. C'est l'une des motivations principales de ce genre d'étude.

7. Conclusions et perspectives

Ce mémoire est consacré à l'étude de plusieurs types d'écoulements de fluides en présence d'une surface libre et dominés par la tension de surface. Principalement deux types de problèmes sont abordés :

- L'éclatement d'une bulle à la surface d'un liquide est étudié, en prenant en compte les effets visqueux.
- Deux méthodes d'intégrales de frontières sont détaillées. La première permet de résoudre les écoulements plans, périodiques en espace. Une théorie permettant de prendre en compte les faibles effets visqueux est expliquée. La seconde permet de traiter les problèmes d'écoulements axi-symétriques. Elle est appliquée au cas de la coalescence de deux gouttes en apesanteur.

L'existence potentielle de singularités géométriques à la surface libre unifie ces deux études. Deux types de singularités de l'équation de Bernoulli sont présentés. La première est liée à la naissance d'un jet à une interface, l'autre s'apparente aux instants courts de la coalescence de deux gouttes.

Dans la première partie, il est montré que l'éclatement d'une bulle à la surface peut donner lieu à une singularité de courbure. La surface, loin de la singularité est alors conique. Ce phénomène apparaît pour certaines valeurs du nombre de Ohnesorge, représentatif de l'importance relative des forces visqueuses et de la tension de surface. La valeur de ce nombre détermine ou non l'existence de la singularité. Or, nous avons montré que cette singularité pouvait être décrite grâce à une théorie potentielle. Si l'on cherchait à décrire l'écoulement de manière globale avec une seule méthode numérique, il faudrait disposer d'une méthode permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes à une échelle arbitrairement petite. Les méthodes actuelles ne permettent pas ce genre de calcul. On peut donc imaginer utiliser conjointement les deux méthodes axi-symétriques décrites dans ce mémoire. Il est tout à fait réaliste de résoudre les équations de Navier-Stokes jusqu'à la limite de validité de cette formulation (lorsque les plus petites échelles atteignent la taille de quelques mailles), puis initialiser un calcul potentiel avec les vitesses obtenues sur la surface.

Dans la seconde partie de ce mémoire, la coalescence de deux gouttes en apesanteur est étudiée aux instants courts. Cette configuration présente naturellement une singularité de courbure, puisque la pont liquide reliant les deux gouttes possède une courbure très grande à l'instant suivant le contact. Une fois de plus, il n'est pas clair que les effets visqueux ne jouent aucun rôle. En effet, d'autres études ont été menées sur le sujet [17], qui supposent que l'écoulement est décrit par les équations de Stokes. Cette hypothèse donne une importance majeure

aux effets de la viscosité. Il serait donc judicieux de résoudre les équations de Navier-Stokes dans une région ne comprenant que la zone de coalescence. Cette étude est possible dans la mesure où l'échelle des gouttes n'intervient plus. Ce type de calcul permettrait de quantifier l'importance relative des effets visqueux et inertiels.

Dans le cas de l'éclatement de la bulle, l'angle du cône reste un problème ouvert. Il s'avère donc nécessaire de faire une étude asymptotique précise des équations gouvernant la singularité, dans le but de déterminer cet angle et le type d'écoulement que l'on doit observer loin de la singularité. Il est possible que cet angle soit imposé, comme le suggèrent Zeff et *al* [55], ou bien qu'il soit une condition à la limite des équations dans l'espace auto-similaire.

Les équations dans l'espace des variables auto-similaires restent également à résoudre. La méthode intégrale axi-symétrique est parfaitement adaptée à ce genre de problèmes. En effet, dans ces équations, une des deux inconnues est la fonction g , harmonique. L'écriture d'une équation intégrale doit donc permettre de déterminer ses dérivées radiale et longitudinale. Le système d'équations ne comportant pas de dérivées temporelles, il est possible d'introduire dans ces équations une dynamique artificielle, permettant de les résoudre de la même manière que le système d'équations de la théorie potentielle. La résolution de telles équations conduirait à une solution stationnaire, solution universelle de la singularité conique. Cette étude n'a – à notre connaissance – jamais été effectuée de manière détaillée.

Enfin, la résolution des équations auto-similaires doit également conduire à la solution du problème aux instants courts après la formation du jet. Si l'écoulement est singulier avant la naissance du jet, il doit l'être aussi après. La différence entre les deux singularités semble venir de la valeur adoptée pour l'ordonnée du point se trouvant sur l'axe de symétrie dans l'espace des variables auto-similaires.

La méthode intégrale pour les écoulements plans périodiques devrait permettre de résoudre des singularités analogues. Ces singularités apparaissent notamment lors de l'impact d'une vague sur un mur vertical. Des théories ont déjà été présentées sur ce sujet [10], qui présentent le phénomène comme étant singulier, ce qui incite à chercher des solutions auto-similaires du problème. Lors de l'impact, un jet vertical se forme et peut s'apparenter au jet observé lors de l'éclatement d'une bulle à la surface. Il ne serait pas étonnant que l'on obtienne le même type de solutions auto-similaires que dans le cas axi-symétrique. De plus, la périodicité n'est pas une hypothèse nécessaire à la formulation du problème. On peut, par exemple, supposer que les deux bords verticaux du domaine de calcul sont des parois, l'une fixe, l'autre se déplaçant.

A. Calcul de la courbure locale d'une surface de révolution

Soient un système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) associé à un repère cartésien (O, x, y, z) et S une surface de révolution autour de l'axe Oz . Soit, également, une abscisse curviligne décrivant cette surface dans le plan $(0, x, z)$.

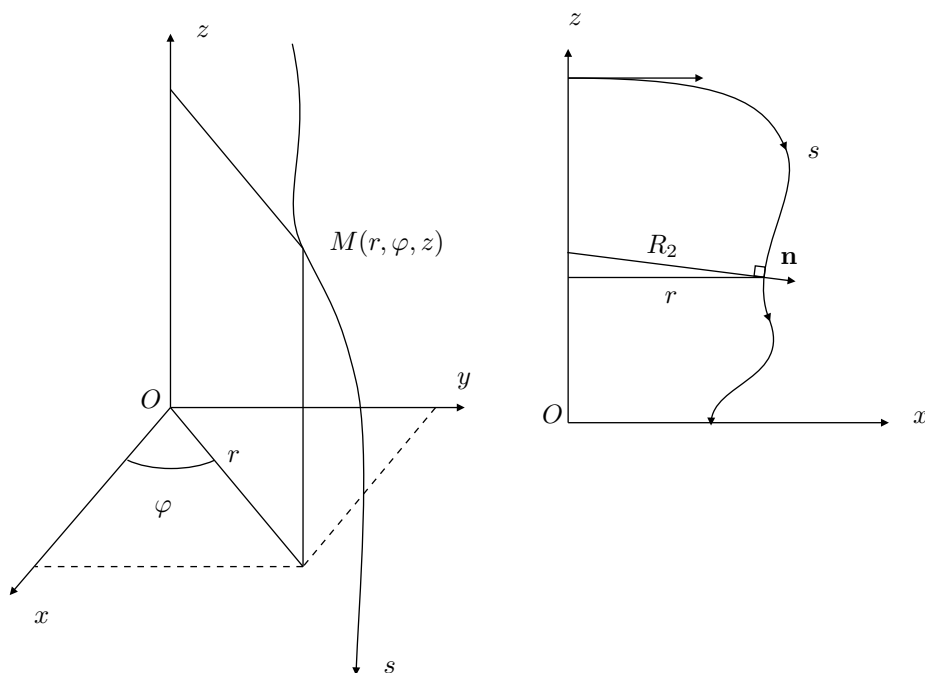


FIG. A.1.: *Courbure d'une surface de révolution.*

La courbure locale de la surface est égale à l'opposé de la divergence sur la surface de la normale (extérieure dans le cas présent) :

$$\kappa = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$$

où l'on définit le gradient sur la surface comme :

$$\nabla_s = \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

La tangente et la normale s'écrivent :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \begin{pmatrix} r' \\ z' \end{pmatrix} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \begin{pmatrix} -z' \\ r' \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

On a donc à calculer le produit scalaire :

$$\kappa(s) = -\left(\mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot (n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z)$$

qui se simplifie en :

$$\kappa(s) = -(t_r \frac{\partial n_r}{\partial s} + t_z \frac{\partial n_z}{\partial s}) - \frac{n_r}{r} \quad (\text{A.2})$$

Le premier terme correspond à la courbure dans le plan $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ et s'exprime finalement :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r' z'' - r'' z'}{r'^2 + z'^2} \quad (\text{A.3})$$

Le second terme correspond à l'inverse du rayon de la sphère tangente au point M et ayant son centre sur l'axe de symétrie ; il s'écrit finalement :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{z'}{r \sqrt{r'^2 + z'^2}} \quad (\text{A.4})$$

La courbure algébrique de la surface au point M s'écrit donc :

$$\kappa(s) = \frac{r' z'' - r'' z'}{r'^2 + z'^2} + \frac{z'}{r \sqrt{r'^2 + z'^2}} \quad (\text{A.5})$$

Cette formulation n'étant valable que lorsque r est non nul, il faut la modifier pour trouver la courbure de la surface aux points d'intersection avec l'axe de symétrie. Dans ce cas, la courbure plane ne pose pas de problème ; en revanche, il faut écrire un développement limité $z'(s)$ autour de $s = 0$ pour obtenir la valeur du second terme de courbure sur l'axe de symétrie :

$$z'(s \ll 1) = z'(0) + s z''(0) + o(s^2) \quad (\text{A.6})$$

La surface rencontrant perpendiculairement l'axe de symétrie, $z'(0) = 0$ et $r'(0) = 1$; on a donc :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{z'(s)}{s} = z''(0) \quad (\text{A.7})$$

De plus, $s \sim r$ en zéro, ce qui conduit, après simplifications, à la courbure totale de la surface sur l'axe de symétrie :

$$\kappa(0) = 2z''(0) \quad (\text{A.8})$$

On trouve la même identité avec un signe $-$ pour l'autre extrémité de la courbe rencontrant l'axe de symétrie ($z' = 0, r' = -1$).

Si la surface est décrite, non plus par $(r(s), z(s))$, mais par $z = h(r)$, ce qui est le cas pour l'étude des solutions auto-similaires de l'effondrement d'une cavité, la variation infinitésimale d'abscisse curviligne s'exprime sous la forme :

$$ds = dr\sqrt{1 + h'^2}$$

expression de laquelle on peut déduire les dérivées première et seconde de r en fonction de s :

$$r'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + h'^2}} \quad r''(s) = -\frac{h'h''}{1 + h'^2}$$

qui permettent de trouver les dérivées première et seconde de z en fonction de s :

$$z'(s) = \frac{h'}{\sqrt{1 + h'^2}} \quad z''(s) = \frac{h''}{1 + h'^2} - \frac{h'^2 h''}{(1 + h'^2)^2}$$

En remplaçant ces expressions dans celle de la courbure, on obtient :

$$\kappa(r) = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} + \frac{h'}{r\sqrt{1 + h'^2}} \quad (\text{A.9})$$

De même que pour la formulation générale, on peut écrire un développement limité autour de $r = 0$ pour le point se situant sur l'axe de symétrie et on trouve :

$$\kappa(0) = 2h''(0) \quad (\text{A.10})$$

B. Résidu complexe

Soient une surface S enfermant un volume Ω et un point M extérieur à Ω , d'affixe z_e (Cf. Fig. B.1). Le théorème de Cauchy s'applique pour la fonction holomorphe $\beta(z)/(z - z_e)$, où $\beta(z)$ est le potentiel complexe de l'écoulement :

$$\int_S \frac{\beta(z)}{z - z_e} dz = 0 \quad (\text{B.1})$$

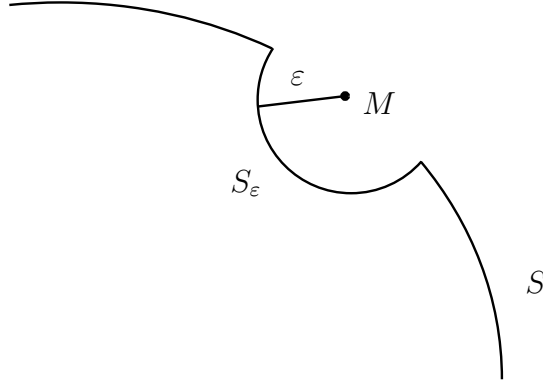


FIG. B.1.: La limite de l'intégrale est calculée pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

$z - z_e$ est égal à $\varepsilon e^{i\theta}$ pour $z \in S_\varepsilon$. Supposons β constant sur S_ε , l'intégrale peut alors s'écrire :

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\beta(z)}{z - z_e} dz = \int_{S_\varepsilon} \beta(z_e) \frac{e^{-i\theta}}{\varepsilon} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\alpha_e \beta(z_e)$$

où α_e est égal à π pour une surface lisse. Etant donné que cette intégrale possède une limite quand ε tend vers zéro, l'intégrale sur $S - S_\varepsilon$ en possède une également et l'on a bien :

$$i\alpha_e \beta(z_e) + \int_{S - S_\varepsilon} \frac{\beta(z)}{z - z_e} dz = 0 \quad (\text{B.2})$$

où l'intégrale doit être prise au sens de la valeur principale de Cauchy.

C. Résidu du calcul de φ sur la surface

Soient une surface S enfermant un volume Ω et un point M intérieur à Ω . Le potentiel des vitesses au point M s'exprime en fonction de la densité de dipôles μ sur la surface :

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (\text{C.1})$$

où λ est la distance entre le point M et un point de la surface.

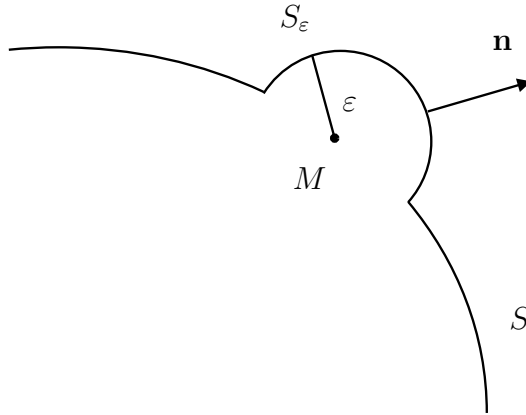


FIG. C.1.: La limite de l'intégrale est calculée pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

On peut décomposer l'intégrale en la somme des intégrales sur les deux surfaces S et S_ε . S_ε est une calotte sphérique centrée en M . La valeur de φ en un point de la surface est alors égale à :

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS + \int_{S-S_\varepsilon} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \right)$$

On peut supposer μ constant sur S_ε . Sur cette surface, λ est constant, égal à ε , et sa dérivée suivant la normale est égale à :

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

La limite de la première intégrale lorsque ε tend vers zéro est donc égale à :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\mu(M)}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} dS = -2\pi\mu(M)$$

La limite de la deuxième intégrale est la valeur principale, au sens de Cauchy, de l'intégrale sur l'ensemble de la surface fermée S . Finalement, on a :

$$\varphi(M) = \frac{1}{2}\mu(M) - \frac{1}{4\pi} \int_{S-\{M\}} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) dS \quad (\text{C.2})$$

D. Calcul des noyaux des intégrales de Fredholm et du vecteur potentiel

Dans cette annexe, nous dérivons de manière explicite les noyaux des intégrales rencontrées lors du développement de la méthode d'intégrales de frontières. Ces noyaux s'expriment, en géométrie axi-symétrique, sous la forme de fonctions des intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce $K(m)$ et $E(m)$:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2 \theta)^{1/2}} \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta$$

Nous aurons également recours à une de leurs propriétés [34] :

$$K'(m) = \frac{1}{2m} \left(\frac{E(m)}{1 - m} - K(m) \right)$$

D.1. Equation intégrale de Fredholm

L'équation de Fredholm pour le potentiel des vitesses et la densité de dipôles s'écrit :

$$\varphi(M) = \mu(M) + \frac{1}{4\pi} \int_s (\mu(M) - \mu)r \int_\theta \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) d\theta ds \quad (\text{D.1})$$

Il s'agit donc de calculer l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) d\theta$$

où $\lambda(R, Z, r, \theta, z) = \sqrt{(r + R)^2 - 2rR(1 + \cos \theta) + (z - Z)^2}$. L'intégrand peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta + (z - Z)^2)^{1/2}} \right)$$

On est donc amené à calculer l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(n_r \frac{\partial}{\partial r} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta + (z - Z)^2)^{1/2}} d\theta$$

expression qui s'écrit, après simplifications :

$$I_1 = - \int_0^{2\pi} \frac{n_r(r - R \cos \theta) + n_z(z - Z)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta + (z - Z)^2)^{3/2}} d\theta$$

En posant :

$$A = (r + R)^2 + (z - Z)^2 \quad (\text{D.2})$$

$$m = 4rR/A, \quad (\text{D.3})$$

on peut encore simplifier cette intégrale :

$$\begin{aligned} I_1 = & - \frac{n_r}{A^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{(r + R) - 2R \cos^2(\theta/2)}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} d\theta \\ & - \frac{n_z(z - Z)}{A^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} d\theta \end{aligned}$$

Deux types d'intégrales doivent donc être calculées et peuvent s'exprimer en fonction de $K(m)$ et $K'(m)$. Le premier correspond à la deuxième intégrale de l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{1/2}} + \\ & m \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta/2) d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $\varphi = \theta/2$ et en remarquant que la deuxième intégrale est, à un facteur multiplicatif près, la dérivée par rapport à m de la première, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} &= 2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 - m \cos^2 \varphi)^{1/2}} + \\ & 4m \frac{\partial}{\partial m} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 - m \cos^2 \varphi)^{1/2}} \end{aligned}$$

Les parties de chaque intégrale sur $[0, \pi/2]$ et sur $[\pi/2, \pi]$ étant identiques, on peut finalement exprimer l'intégrale du membre de gauche en fonction de $K(m)$ et de $K'(m)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} = 4(K(m) + 2mK'(m))$$

En utilisant la propriété de $K(m)$ et $E(m)$ précisée en début de cette annexe, on peut finalement écrire :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} = \frac{4E(m)}{1 - m}$$

le second type d'intégrale à calculer trouve son expression dans le calcul précédent :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta/2)}{(1-m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} d\theta = 8K'(m) = \frac{4}{m} \left(\frac{E(m)}{1-m} - K(m) \right)$$

Finalement, l'intégrale I_1 peut s'écrire de la façon suivante :

$$I_1 = -\frac{4E(m)}{A^{3/2}(1-m)}(n_r(r+R) + n_z(z-Z)) + \frac{8Rn_r}{mA^{3/2}} \left(\frac{E(m)}{1-m} - K(m) \right)$$

Posons $\mathbf{h} = (R-r)\mathbf{e}_r + (Z-z)\mathbf{e}_z$. On obtient :

$$I_1 = \frac{1}{A^{1/2}} \left(\frac{4E(m)}{A(1-m)} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} + 2n_r \frac{E(m) - K(m)}{r} \right)$$

Finalement, la fonction K_φ de l'équation intégrale 5.16 s'écrit :

$$K_\varphi = \frac{r}{\pi A^{1/2}} \left(\frac{E(m)}{A(1-m)} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} + n_r \frac{E(m) - K(m)}{2r} \right) \quad (\text{D.4})$$

Dans le cadre de notre étude numérique, les intégrales elliptiques $K(m)$ et $E(m)$ sont calculées grâce à une approximation de la forme [1] :

$$\begin{aligned} K(m) &= (((ak^2 + bk) * k + ck) * k + dk) \\ &\quad - (((ek^2 + fk) * k + gk) * k + hk) * \log(k) \\ E(m) &= ((ae * k + be) * k + ce) * k + de \\ &\quad - (((ee * k + fe) * k + ge) * k) * \log(k) \end{aligned}$$

où $k = 1 - m$ et $ak, bk, \dots, ae, be, \dots$ sont des constantes.

D.2. Vecteur potentiel

Le vecteur potentiel s'écrit sous forme intégrale :

$$\mathbf{A}(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_s (\mu(M) - \mu)r \int_\theta \mathbf{n} \wedge \nabla_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) d\theta ds \quad (\text{D.5})$$

Le gradient et la normale s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \\ \mathbf{n} &= \mathbf{e}_r n_r + \mathbf{e}_z n_z \end{aligned}$$

Leur produit vectoriel s'exprime donc sous la forme :

$$\mathbf{n} \wedge \nabla = \mathbf{e}_\theta (t_r \partial_r + t_z \partial_z) - (t_r \mathbf{e}_r + t_z \mathbf{e}_z) \frac{\partial_\theta}{r}$$

où la tangente est définie comme :

$$t_r = n_z \quad t_z = -n_r$$

\mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ s'expriment dans un repère cartésien comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{x} \cos \theta + \mathbf{y} \sin \theta \\ \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{x} \sin \theta + \mathbf{y} \cos \theta \end{aligned}$$

On cherche la composante suivant \mathbf{y} de \mathbf{A} (appelée A_θ par abus de langage); on n'a donc à calculer que les parties de l'intégrale suivant \mathbf{y} , soit l'intégrale suivante :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta (t_r \partial_r + t_z \partial_z) - \sin \theta \frac{t_r}{r} \partial_\theta \right) \frac{1}{\lambda} d\theta$$

En exprimant les dérivées de λ suivant r , θ et z , on obtient :

$$I_2 = - \int_0^{2\pi} \frac{t_r(r - R \cos \theta) \cos \theta + t_z(z - Z) \cos \theta - \frac{t_r}{r}(rR \sin \theta) \sin \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta + (z - Z)^2)^{3/2}} d\theta$$

Soit, en utilisant la définition de A , m , \mathbf{t} et \mathbf{h} :

$$I_2 = - \frac{1}{A^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{-\cos \theta \mathbf{h} \cdot \mathbf{t} + Rt_r(\cos \theta - 1)}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} d\theta$$

Le numérateur de l'intégrand peut s'écrire :

$$N = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}(2 \cos^2(\theta/2) - 1) + Rt_r(2 \cos^2(\theta/2) - 2)$$

On peut maintenant décomposer les intégrales en une somme d'intégrales connues :

$$\begin{aligned} I_2 A^{3/2} &= -2(Rt_r - \mathbf{h} \cdot \mathbf{t}) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta/2)}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} d\theta \\ &\quad - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{t} - 2Rt_r) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - m \cos^2(\theta/2))^{3/2}} \end{aligned}$$

Les deux intégrales s'expriment respectivement, en fonction de $K(m)$, $E(m)$:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{4}{m} \left(\frac{E(m)}{1 - m} - K(m) \right) \\ I'' &= \frac{4E(m)}{1 - m} \end{aligned}$$

L'intégrale I_2 s'écrit donc, après simplifications :

$$I_2 = \frac{1}{A^{3/2}} \left(\frac{8Rt_r}{m} (K(m) - E(m)) + \mathbf{h} \cdot \mathbf{t} \left(\frac{8}{m} (E(m) - K(m)) + \frac{4E(m)}{1-m} \right) \right)$$

En utilisant le fait que $m = 4Rr/A$, on trouve l'expression du noyau K_A de l'intégrale 5.17 :

$$K_A = \frac{r}{\pi A^{1/2}} \left(\frac{t_r}{2r} (K(m) - E(m)) + \mathbf{h} \cdot \mathbf{t} \left(\frac{E(m) - K(m)}{2rR} + \frac{E(m)}{A(1-m)} \right) \right) \quad (\text{D.6})$$

Bibliographie

- [1] M. Abramovitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover, New York, 1965.
- [2] G.I. Barenblatt. *Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Plenum Publishing Corporation, 1978.
- [3] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [4] J. Bico, C. Marzolin, and D. Quéré. Pearl drops. *Europhys. Letters*, 47(2) :220–226, 1999.
- [5] D. C. Blanchard. The size and height to which drops are ejected from bursting bubbles in seawater. *J. Geophys. Res.*, 94(C8) :10999–11002, 1989.
- [6] D. C. Blanchard and L. D. Syzdek. Film drop production as a function of bubble size. *J. Geophys. Res.*, 93(C4) :3649–3654, 1988.
- [7] J. M. Boulton-Stone. The effect of surfactant on bursting gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, 302 :231–257, 1995.
- [8] J.M. Boulton-Stone and J.R. Blake. Gas bubbles bursting at a free surface. *J. Fluid Mech.*, 254 :437–466, 1993.
- [9] M. Coantic. Mass transfert across the ocean-air interface : small scale hydrodynamic and aerodynamic mechanisms. *PhysicoChemical Hydrodynamics*, 1 :249–279, 1980.
- [10] M. J. Cooker and D. H. Peregrine. Pressure-impulse theory for liquid impact problems. *J. Fluid. Mech.*, 297 :193–214, 1995.
- [11] F. Dias and C. Kharif. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 31 :301–341, 1999.
- [12] J. Eggers. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. Letters*, 71(21) :3458–3460, 1993.
- [13] J. Eggers. Theory of Drop Formation. *Phys. Fluids*, 7(5) :941–953, 1995.
- [14] J. Eggers. Nonlinear Dynamics and Breakup of Free-surface Flows. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3) :865–929, 1997.
- [15] J. Eggers. Coalescence of spheres by surface diffusion. *Phys. Rev. Letters*, 80(12) :2634–2637, 1998.
- [16] J. Eggers and T. F. Dupont. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier-stokes equation. *J. Fluid Mech.*, 262 :205–221, 1994.

- [17] J. Eggers, J. R. Lister, and H. A. Stone. Coalescence of liquid drops. *J. Fluid Mech.*, 401 :293–310, 1999.
- [18] S. Grilli, P. Guyenne, and F. Dias. A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35 :829–867, 2001.
- [19] D. Gueyffier, J. Li, R. Scardovelli, and S. Zaleski. Volume of fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *J. Comp. Phys.*, 152 :423–456, 1999.
- [20] J. Hogrefe, N. Peffley, C. Goodridge, W. Shi, H. Hentschel, and D. Lathrop. Power-law singularities in gravity-capillarity waves. *Physica D*, 123 :183–205, 1998.
- [21] I.B. Ivanov, P.A. Kralchevsky, and A.D. Nikolov. Film and line tension effects on the attachment of particles to an interface. *J. Colloid Interface Sci.*, 112(1) :97–143, 1986.
- [22] J. Keller, P. Milewski, and J.-M. Vanden-Broeck. Merging and wetting driven by surface tension. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 19 :491–502, 2000.
- [23] J.B. Keller and M.J. Miksis. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(2) :268–277, 1983.
- [24] B. Lafaurie, C. Narbone, R. Scardovelli, S. Zaleski, and G. Zanetti. Modeling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *J. Comp. Phys.*, 113 :134–147, 1994.
- [25] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Physique théorique : Mécanique des Fluides*. Plenum Publishing Corporation, 1978.
- [26] M. S. Longuet-Higgins. Bubbles, breaking waves and hyperbolic jets at a free surface. *J. Fluid Mech.*, 127 :103–121, 1983.
- [27] M. S. Longuet-Higgins. An analytic model of sound production by raindrops. *J. Fluid Mech.*, 214 :395–410, 1990.
- [28] M. S. Longuet-Higgins and H. Oguz. Critical microjets in collapsing cavities. *J. Fluid Mech.*, 290 :183–201, 1995.
- [29] T.S. Lundgren and N.N. Mansour. Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects. *J. Fluid Mech.*, 194 :479–510, 1988.
- [30] F. MacIntyre. Flow patterns in breaking bubbles. *J. Geophys. Res.*, 77(27) :5211–5228, 1972.
- [31] W. K. Melville. The role of surface-wave breaking in air-sea interaction. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 28 :279–321, 1996.
- [32] A. Menchaca-Rocha, A. Martínez-Dávalos, R. Núñez, S. Popinet, and S. Zaleski. Coalescence of liquid drops by surface tension. *Phys. Rev. E*, 63 :046309 :1–5, 2001.
- [33] H. N. Oguz and A. Prosperetti. Surface-tension effects in the contact of liquid surfaces. *J. Fluid Mech.*, 203 :149–171, 1989.

-
- [34] H. N. Oguz and A. Prosperetti. Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces. *J. Fluid Mech.*, 219 :143–179, 1990.
- [35] Y. Po-Wen, S. L. Ceccio, and G. Tryggvason. The collapse of a cavitation bubble in shear flows-a numerical study. *Physics of Fluids*, 1995.
- [36] S. Popinet. *Stabilité et formation de jets dans les bulles cavitantes : développement d'une méthode de chaîne de marqueurs adaptée au traitement numérique des équations de Navier-Stokes avec surfaces libres*. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2000.
- [37] S. Popinet and S. Zaleski. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 30 :775–793, 1999.
- [38] S. Popinet and S. Zaleski. Bubble collapse near a solid boundary : a numerical study of the influence of viscosity. *J. Fluid Mech.*, Submitted to JFM.
- [39] C. Pozrikidis. *Introduction to theoretical and computational fluid dynamics*. Oxford University Press, 1997.
- [40] A. Ramos, F. Garcia, and J. Valverde. On the breakup of slender liquid bridges : Experiments and a 1-d numerical analysis. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 18 :649–658, 1999.
- [41] F.J. Resch, J.S. Darrozes, and G.M. Afeti. Marine liquid aerosol production from bursting of air bubbles. *J. Geophys. Res.*, 91(C1) :1019–1029, 1986.
- [42] D. Richard and D. Quéré. Viscous drops rolling on a tilted non-wettable solid. *Europhys. Letters*, 48(3) :286–291, 1999.
- [43] X. D. Shi, M. P. Brenner, and S. R. Nagel. A cascade of structure in a drop falling from a faucet. *Science*, 265 :219–222, 1994.
- [44] H. E. Snyder and R. D. Reitz. Direct droplet production from a liquid film : a new gas-assisted atomization mechanism. *J. Fluid Mech.*, 375 :363–381, 1998.
- [45] D. E. Spiel. Acoustical measurements of air bubbles bursting at a water surface : Bursting bubbles as helmholtz resonators. *J. Geophys. Res.*, 97(C7) :11443–11452, 1992.
- [46] D. E. Spiel. The number and size of jet drops produced by air bubbles bursting on a fresh water surface. *J. Geophys. Res.*, 99(C5) :10289–10296, 1994.
- [47] D. E. Spiel. On the births of jet drops from bubbles bursting on water surfaces. *J. Geophys. Res.*, 100(C3) :4995–5006, 1995.
- [48] D. E. Spiel. More on the jet births of jet drops from bubbles bursting on seawater surfaces. *J. Geophys. Res.*, 102(C3) :5815–5821, 1997.
- [49] A. J. Szeri. Capillary waves and air-sea gas transfer. *J. Fluid Mech.*, 332 :341–358, 1997.
- [50] Y. Toba. Drop production by bursting of air bubbles on the sea surface (ii) theoretical study on the shape of floating bubbles. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 15(3), 1959.

- [51] E.O. Tuck and L.W. Schwartz. Thin static drops with a free attachment boundary. *J. Fluid Mech.*, 223 :313–324, 1991.
- [52] T. Vinje and P. Brevig. Breaking waves on finite water depths. A numerical study. 1980. Rapport.
- [53] D.A. Weiss and A.L. Yarin. *J. Fluid Mech.*, 385 :229–254, 1999.
- [54] A.L. Yarin and D.A. Weiss. *J. Fluid Mech.*, 283 :141–173, 1995.
- [55] B. W. Zeff, B. Kleber, J. Fineberg, and D. P. Lathrop. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Letters to Nature*, 403 :401–404, 2000.